

网络出版时间:
网络出版地址:

半立方抛物线形明渠共轭水深的迭代算法

马子普¹, 张根广¹, 冯 雪², 程欢欢², 吴金旭³

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100; 2 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098;

3 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

【摘 要】 【目的】寻求半立方抛物线形明渠共轭水深的迭代计算方法。【方法】根据半立方抛物线形明渠断面的几何形态及棱柱体水平明渠水跃方程, 推求得到半立方抛物线形明渠共轭水深的迭代计算公式, 并从理论上证明其收敛性; 通过对工程中不同流量 Q 与不同断面形状参数 p 多种组合情况下的共轭水深进行计算和趋势线拟合, 建立计算共轭水深迭代初值的直接计算式。【结果】推导出半立方抛物线形渠道断面的水跃方程, 并进而得到跃前水深、跃后水深的迭代计算公式, 运用迭代初值直接计算式求出迭代初值, 将该值代入共轭水深迭代计算公式, 经过几步迭代便可收敛得到精度很高的共轭水深值。【结论】推求的半立方抛物线形明渠共轭水深迭代计算公式物理概念明确、计算简捷、精度高、适用范围广, 可以满足工程实践要求。

【关键词】 半立方抛物线形明渠; 共轭水深; 迭代算法; 迭代初值

【中图分类号】 TV131.4

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2012)11-0211-05

Iterative algorithm of conjugate depth for semi-cubic parabolic open channels

MA Zi-pu¹, ZHANG Gen-guang¹, FENG Xue², CHENG Huan-huan², WU Jin-xu³

(1 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

3 State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: 【Objective】 The aim was to find the iterative calculating formula of conjugate depth for semi-cubic parabolic open channels. 【Method】 The iterative calculating formula of semi-cubic parabolic channels was deduced according to the cross-section geometric features of semi-cubic parabolic channels and the hydraulic jump equation of general prism channels, and the convergence of corresponding iterative formula was proved theoretically. Through calculation of the sequent depth in the condition of different discharge Q , cross-section shape parameter p , and appropriate fitting formula, the calculation formula for the initial iteration value of conjugate depth had been obtained. 【Result】 We deduced the hydraulic jump equation of semi-cubic parabolic channels and got the iterative calculating formula of the initial depth and the sequent depth. We also calculated the initial iteration value using the direct calculation formula itself and substituted the value to the iterative formula of conjugate depth. The conjugate depth value with high precision was obtained after several iterations. 【Conclusion】 The iterative calculating formula of conjugate depth for semi-cubic parabolic channels had definite physics concept, easy calculation, high precision and wide range and could satisfy the requirement of engineering practice.

【收稿日期】 2012-03-26

【基金项目】 国家自然科学基金青年基金项目(50909083)

【作者简介】 马子普(1988—), 男, 河南辉县人, 在读硕士, 主要从事水力学及河流动力学研究。E-mail: ma. zi. pu@163.com

【通信作者】 张根广(1964—), 男, 山西夏县人, 副教授, 主要从事水力学及河流动力学研究。E-mail: zgg64@163.com

Key words: semi-cubic parabolic open channels; conjugate depth; iterative formula; initial iteration value

特征水深的计算是水力计算的重要内容,应用十分频繁且精度要求较高。学者们对于常见几何形状的渠道,如矩形、梯形、圆形、抛物线形式(平方、立方、半立方)等断面,关于正常水深与临界水深的计算已经进行了大量卓有成效的研究工作,并提出了多种简捷的计算方法^[1-12],但目前有关常见断面共轭水深计算的研究并不多见。成都科学技术大学水力学教研室^[12]于上世纪 70 年代末提出了采用查图法计算无压流圆形断面的共轭水深;刘计良等^[13]、刘玲等^[14]分别提出了梯形渠道水跃共轭水深的直接计算公式。抛物线形式断面渠道具有过水能力强、输砂率高、耐冲刷、耐冻胀破坏、边坡稳定性较好等特点,在水利工程中应用十分广泛。近年来,随着施工机具的发展和施工水平的大幅提高,较早在我国西部地区发展起来的半立方抛物线形渠道,由于在施工、制模中更容易计算和控制,目前在水力发电渠道、灌溉渠道、排水渠道、城市给排水工程中,以及在水北调中线和东线工程中都得到了大量推广应用。但迄今为止,关于半立方抛物线形过水断面形式下共轭水深的研究尚未见报道,这给实际工程应用带来了较大不便。为此,本研究根据半立方抛物线形断面的几何形态及棱柱体水平明渠水跃方程,推导得到了半立方抛物线形渠道跃前、跃后水深的迭代计算公式,并研究建立了计算跃前、跃后水深迭代初值的公式,通过计算实例说明了应用该方法计算半立方抛物线形渠道共轭水深的步骤,以期半立方抛物线形渠道共轭水深的准确计算提供支持。

1 断面水力要素与水跃方程推求

半立方抛物线形渠道过水断面及其几何尺寸如图 1 所示。

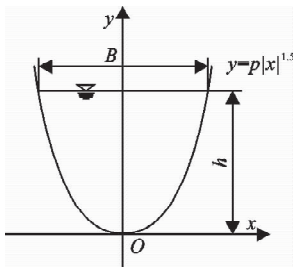


图 1 半立方抛物线形渠道过水断面示意图

Fig. 1 Sketch map of semi-cubic parabolic channel section

由图 1 可知,半立方抛物线形渠道过水断面曲线的表达式为:

$$y = p|x|^{1.5} \quad (p > 0). \quad (1)$$

式中: y 为断面曲线纵坐标, m ; p 为断面形状参数, $m^{-0.5}$; x 为断面曲线横坐标, m 。

如图 1 所示,设 $x = \pm B/2$, $y = h$, 其中 B 为水面宽度, m ; h 为水面宽度为 B 时对应的水深, m 。则可确定参数 $p = 2\sqrt{2}h/B^{1.5}$, 那么,半立方抛物线曲线方程可写为:

$$y = 2\sqrt{2}h|x|^{1.5}/B^{1.5}. \quad (2)$$

半立方抛物线形渠道过水断面面积(A)为:

$$A = \frac{3Bh}{5} = \frac{6h^{5/3}}{5p^{2/3}}. \quad (3)$$

由平面形心计算公式得,形心的纵向坐标为:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{5h}{8}. \quad (4)$$

式中: y_c 为断面形心点纵坐标, m ; S_x 为过水断面对 x 轴的静矩, m^3 。

则形心到水面的距离(h_c)为:

$$h_c = \frac{3h}{8}. \quad (5)$$

棱柱体水平明渠的水跃方程为:

$$\frac{Q^2}{gA_1} + h_{c1}A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + h_{c2}A_2. \quad (6)$$

式中: Q 为流量, m^3/s ; g 为重力加速度, 通常取 $9.81 m/s^2$; A_1 、 A_2 分别为水跃前、后过水断面面积, m^2 ; h_{c1} 、 h_{c2} 分别为水跃前、后过水断面形心距水面的距离, m 。

令 h_1 、 h_2 分别为水跃前、后过水断面的水深, B_1 、 B_2 分别为水跃前、后过水断面的水面宽度, 则:

$$A_1 = \frac{3B_1h_1}{5}, A_2 = \frac{3B_2h_2}{5}; \quad (7)$$

$$h_{c1} = \frac{3h_1}{8}, h_{c2} = \frac{3h_2}{8}. \quad (8)$$

又 h_1 、 B_1 与 h_2 、 B_2 分别满足式(2), 则:

$$B_1 = B \left(\frac{h_1}{h} \right)^{2/3}, B_2 = B \left(\frac{h_2}{h} \right)^{2/3}. \quad (9)$$

将式(7)~(9)代入式(6), 可得:

$$\frac{5Q^2h^{2/3}}{3gBh_1^{5/3}} + \frac{9Bh_1^{8/3}}{40h^{2/3}} = \frac{5Q^2h^{2/3}}{3gBh_2^{5/3}} + \frac{9Bh_2^{8/3}}{40h^{2/3}}. \quad (10)$$

将式(3)与式(10)联立, 可得:

$$\frac{5Q^2p^{2/3}}{6gh_1^{5/3}} + \frac{9h_1^{8/3}}{20p^{2/3}} = \frac{5Q^2p^{2/3}}{6gh_2^{5/3}} + \frac{9h_2^{8/3}}{20p^{2/3}}. \quad (11)$$

这便是半立方抛物线形渠道断面的水跃方程。

2 迭代公式的推求

当渠道断面的形状、尺寸及通过的流量一定时,

水跃方程的左右两边都仅是水深的函数,即水跃函数:

$$J(h) = \frac{5Q^2 p^{2/3}}{6gh^{5/3}} + \frac{9h^{8/3}}{20p^{2/3}} \quad (12)$$

令 $J(h_1) = J(h_2) = k$, k 可通过将 h_1 或 h_2 代入水跃函数式直接求得。

设已知跃前水深 h_1 , 求跃后水深 h_2 , 则

$$k = \frac{5Q^2 p^{2/3}}{6gh_1^{5/3}} + \frac{9h_1^{8/3}}{20p^{2/3}} = \frac{5Q^2 p^{2/3}}{6gh_2^{5/3}} + \frac{9h_2^{8/3}}{20p^{2/3}} \quad (13)$$

为分析方便,令:

$$k_1 = \frac{5Q^2 p^{2/3}}{6g}, k_2 = \frac{9}{20p^{2/3}} \quad (14)$$

则有:

$$k_1 h_2^{-5/3} + k_2 h_2^{8/3} - k = 0 \quad (15)$$

则可得跃后水深的迭代公式为:

$$h_{2i+1} = \left(\frac{k - k_1/h_{2i}^{5/3}}{k_2} \right)^{3/8} \quad (16)$$

同理,已知跃后水深 h_2 , 求跃前水深 h_1 时,可令:

$$k = \frac{5Q^2 p^{2/3}}{6gh_1^{5/3}} + \frac{9h_1^{8/3}}{20p^{2/3}} \quad (17)$$

则可得跃前水深迭代公式为:

$$h_{1i+1} = \left(\frac{k_1}{k - k_2 h_{1i}^{8/3}} \right)^{3/5} \quad (18)$$

3 迭代公式收敛性证明

根据迭代理论^[15], 方程 $x = \varphi(x)$ 的 1 个根为 N , 则迭代公式 $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ 收敛于 N 的条件为: 在 N 的某一邻域 $|x - N| < \delta$ 内, 迭代函数的一阶导数的绝对值小于某一正数 L , 即 $|\varphi'(x)| \leq L$, 且 $0 < L < 1$, 那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 N 。因此, 只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1, 就可以证明该迭代函数是收敛的。据此证明式 (16)、(18) 的收敛性如下:

对式 (16), 令 $\varphi(h_2) = \left(\frac{k - k_1/h_2^{5/3}}{k_2} \right)^{3/8}$, 则:

$$\varphi'(h_2) = \frac{5}{8} \frac{k_1}{k_2} h_2^{-8/3} \left(\frac{k - k_1/h_2^{5/3}}{k_2} \right)^{-5/8} \quad (19)$$

再将式 (16) 代入上式, 得:

$$\varphi'(h_2) = \frac{5}{8} \frac{k_1}{k_2} h_2^{-13/3} \quad (20)$$

又 $h_2 > h_k$, 则:

$$|\varphi'(h_2)| = \left| \frac{5}{8} \frac{k_1}{k_2} h_2^{-13/3} \right| < \frac{5}{8} \frac{k_1}{k_2} h_k^{-13/3} = 1 \quad (21)$$

式中: h_k 为临界水深, $h_k = \left(\frac{125p^{4/3}Q^2}{108g} \right)^{3/13}$ 。

则由此可知, 跃后水深的迭代公式是收敛的。

对式 (18), 令 $\varphi(h_1) = \left(\frac{k_1}{k - k_2 h_1^{8/3}} \right)^{3/5}$, 则:

$$\varphi'(h_1) = \frac{8}{5} \frac{k_2}{k_1} h_1^{5/3} \left(\frac{k_1}{k - k_2 h_1^{8/3}} \right)^{8/5} \quad (22)$$

再将式 (18) 代入上式, 得:

$$\varphi'(h_1) = \frac{8}{5} \frac{k_2}{k_1} h_1^{13/3} \quad (23)$$

对跃前水深, 有 $Fr_1^2 = \frac{Q^2}{gh_1 A_1^2} = \frac{25Q^2 p^{4/3}}{36gh_1^{13/3}}$, 且

$Fr_1 > 1$, 则:

$$|\varphi'(h_1)| = \frac{108gh_1^{13/3}}{125Q^2 p^{4/3}} = \frac{3}{5Fr_1^2} < \frac{3}{5} < 1 \quad (24)$$

式中, Fr_1 为跃前水深时所对应的弗汝德数。由此证明, 跃前水深的迭代公式也是收敛的。

4 迭代初值选取

迭代计算收敛速度的快慢主要取决于两个因素: 一是迭代函数的格式, 二是迭代初值是否恰当。在迭代函数确定后, 合理的迭代初值是迭代计算快速收敛的关键因素。

为了给出合理的迭代初值, 使迭代公式能够快速收敛, 笔者尝试从跃前水深 h_1 与跃后水深 h_2 的关系入手来确定迭代初值。对于半立方抛物线形渠道, h_1 与 h_2 呈负相关关系。为研究这种负相关关系的具体形式, 选取并计算了 0.1~2.5 的 14 组不同 p 值, 0.5~25 的 15 组不同的 Q 值共 210 种组合情况下, 一些特定的跃前水深 h_1 (如 $h_1 = 0.01h_k$, $0.05h_k$ 等) 所对应的跃后水深 h_2 , 以 h_1 为横坐标, h_2 为纵坐标, 绘出 h_1-h_2 关系图, 然后添加趋势线, 得出 h_1-h_2 函数关系式, 相关系数都可达到 0.99 以上。结果表明, h_1 与 h_2 呈幂函数关系, 具体形式如下:

$$h_2 = ah_1^b (a > 0, b < 0) \quad (25)$$

式中: a 、 b 均为与 p 、 Q 有关的参数。

然后, 分析各组 p 值不变情况下 a 随 Q 的变化, 均可拟合得到 $a = tQ^{0.7684}$ (其中 t 为参数), 进而分析不同 p 时参数 t 的变化, 可拟合得到 $t = 0.4645p^{0.5123}$, 则可得:

$$a = 0.4645p^{0.5123}Q^{0.7684} \quad (26)$$

对于不同的 p 、 Q 值, b 值均在 -0.664 与 -0.666 之间波动, 这里近似取为:

$$b = -0.665 \quad (27)$$

将式 (26)、(27) 代入式 (25), 可得到求跃后水深 h_2 的计算公式:

$$h_2 = 0.464\ 5 p^{0.512\ 3} Q^{0.768\ 4} h_1^{-0.665}. \quad (28)$$

显然,将 p 、 Q 、 h_1 代入式(28)即可直接计算得到 h_2 , 这样计算得到的 h_2 与精确值相比会有一定误差,可将其作为计算跃后水深 h_2 的迭代初值 h_0 , 即:

$$h_0 = 0.464\ 5 p^{0.512\ 3} Q^{0.768\ 4} h_1^{-0.665}. \quad (29)$$

同理,对式(28)求反函数,可得到跃前水深 h_1 的迭代初值 h'_0 的计算公式:

$$h'_0 = 0.315\ 7 p^{0.770\ 4} Q^{1.155\ 5} h_2^{-1.503\ 8}. \quad (30)$$

式(29)与(30)中,断面形状参数 p 取值为 $0.1 \leq p \leq 2.5$, 流量 Q 取值为 $0.5 \leq Q \leq 2.5$ 。计算跃后水深时,将迭代初值计算式(29)与迭代公式(16)联合使用;计算跃前水深时,将迭代初值计算式(30)与迭代公式(18)联合使用。

5 实例应用

某水平渠道为半立方抛物线形式断面,抛物线方程为 $y = 0.2|x|^{1.5}$, 流量 $Q = 1.5\ \text{m}^3/\text{s}$, 若渠道某处发生水跃,跃前水深 $h_1 = 0.29\ \text{m}$, 试求跃后水深 h_2 。

解:将 p 、 Q 、 h_1 代入式(29)、(13)、(14),可求出 $h_0 = 0.633\ 5$, $k = 0.562\ 9$, $k_1 = 0.065\ 4$, $k_2 = 1.315\ 8$ 。将求得的 h_0 、 k 、 k_1 、 k_2 代入迭代公式(16),只需 4 次迭代计算即可得到跃后水深 $h_2 = 0.658\ 4$ 。

将 p 、 Q 代入临界水深计算公式得到 $h_k = 0.448\ 8$, 再随意选取一小于 h_k 的值作为初值代入迭代公式(16)进行计算,也可得到跃后水深 $h_2 = 0.658\ 4$, 但求解过程盲目性大,不易很快收敛。本研究物理概念明确,公式形式简明,通过计算可快速得到高精度的数值解,体现了该方法的可靠性和有效性。

6 结 语

本研究推求得到了半立方抛物线形渠道的水跃方程,进而通过数学变换将其化为求解半立方抛物线形渠道跃前、跃后水深的迭代公式,并分别从理论上证明了迭代公式的收敛性。通过对多组不同流量与断面形状参数下的跃前、跃后水深值进行分析,得到了计算跃前、跃后水深迭代初值的直接计算式。通过迭代初值计算公式与相应共轭水深迭代计算公式的联合应用,可使计算结果快速收敛。该方法简单、准确,适用范围广,对生产实践及水工设计手册编制均有参考价值。

[参考文献]

- [1] 赵延风,张宽地,芦 琴. 矩形断面明渠均匀流水力计算的直接计算公式 [J]. 西北农林科技大学学报:自然科学版,2008,36(9):224-228.
Zhao Y F, Zhang K D, Lu Q. Formula on direct calculation of water depth of uniform flow in rectangular open channel [J]. Journal of Northwest A&F University: Natural Science Edition, 2008, 36(9):224-228. (in Chinese)
- [2] 王正中,陈 涛,万 斌,等. 明渠临界水深计算方法总论 [J]. 西北农林科技大学学报:自然科学版,2006,34(1):155-161.
Wang Z Z, Chen T, Wan B, et al. Pandect for the calculating methods of the critical depth of opening channel in different typical cross sections [J]. Journal of Northwest A&F University: Natural Science Edition, 2006, 34(1):155-161. (in Chinese)
- [3] 王正中,袁 骊,武成烈. 再论梯形明渠临界水深计算法 [J]. 水利学报,1999(4):14-16.
Wang Z Z, Yuan S, Wu C L. A final inquiry on a formula for calculating critical depth of open channel with trapezoidal cross section [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(4):14-16. (in Chinese)
- [4] Wang Z Z. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1998, 124(1):90-92.
- [5] 郝树棠. 梯形渠道临界水深的计算及探讨 [J]. 水利学报,1994(8):48-52.
Hao S T. Calculation and discussion of critical depth for ladder canal [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1994(8):48-52. (in Chinese)
- [6] 赵延风,王正中,张宽地. 梯形明渠临界水深的直接计算方法 [J]. 山东大学学报:工学版,2007,37(6):101-105.
Zhao Y F, Wang Z Z, Zhang K D. Direct calculation method for the critical depth of an open trapezoidal channel [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2007, 37(6):101-105. (in Chinese)
- [7] 张宽地,吕宏兴,赵延风. 明流条件下圆形断面正常水深与临界水深直接计算法 [J]. 农业工程学报,2009,25(3):1-5.
Zhang K D, Lü H X, Zhao Y F. Direct calculation for normal depth and critical depth of circular section tunnel under free flow [J]. Transactions of the CSAE, 2009, 25(3):1-5. (in Chinese)
- [8] 魏文礼,杨国丽. 立方抛物线形渠道水力最优断面的计算 [J]. 武汉大学学报:工学版,2006,39(3):49-51.
Wei W L, Yang G L. Calculation of optimal hydraulic cross-section for cubic parabola-shape channel [J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2006, 39(3):49-51. (in Chinese)
- [9] 张志昌,刘亚菲,刘松舰. 抛物线形渠道水力最优断面的计算 [J]. 西安理工大学学报,2002,18(3):235-237.
Zhang Z C, Liu Y F, Liu S J. The calculation of optimal hydraulic cross section in parabola-shape canal [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2002, 18(3):235-237. (in Chinese)

[10] 赵延风,王正中,方 兴,等. 半立方抛物线形渠道正常水深算法 [J]. 排灌机械工程学报,2011,29(3):241-245.

Zhao Y F, Wang Z Z, Fang X, et al. Calculation method for normal depth of semi-cubic parabolic channels [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2011, 29(3): 241-245. (in Chinese)

[11] 文 辉. 李风玲. 立方抛物线形渠道水力计算的显式计算式 [J]. 人民黄河, 2010, 32(1): 75-76.

Wen H, Li F L. Explicit formula of hydraulic calculation of semi-cubic parabola-shaped channel [J]. Yellow River, 2010, 32(1): 75-76. (in Chinese)

[12] 成都科学技术大学水力学教研室. 水力学 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 356-357.

Department of Hydraulics, Chengdu University of Science and Technology. Hydraulics [M]. Beijing: People' s Education Press, 1979: 356-357. (in Chinese)

[13] 刘计良,王正中,杨晓松,等. 梯形渠道水跃共轭水深理论计算方法初探 [J]. 水力发电学报, 2010, 29(5): 216-219.

Liu J L, Wang Z Z, Yang X S, et al. A preliminary study on the theoretical method for calculating conjugate depth of trap-ezoidal channel [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010, 29(5): 216-219. (in Chinese)

[14] 刘 玲,刘伊生. 梯形渠道共轭水深计算方法 [J]. 北方交通大学学报, 1999, 23(3): 44-47.

Liu L, Liu Y S. Calculating method for conjugate depth of hy-draulic jump in trapezoidal channels [J]. Journal of Northern Jiaotong University, 1999, 23(3): 44-47. (in Chinese)

[15] 邓建中,刘之行. 计算方法 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001: 155-156.

Deng J Z, Liu Z X. Calculation method [M]. Xi' an: Xi' an Jiaotong Press, 2001: 155-156. (in Chinese)