

网络出版时间:2012-07-18 10:55

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1390.S.20120718.1055.022.html>

标准 I 型马蹄形断面水跃共轭水深的计算

李若冰, 张志昌

(西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

【摘要】 【目的】研究标准 I 型马蹄形断面水跃共轭水深和临界水深的计算方法, 为马蹄形断面的设计与计算提供依据。【方法】从水跃的基本方程出发, 按照分块计算面积和形心至水面距离的方法, 详细推导了 4 种工况下标准 I 型马蹄形断面水跃共轭水深的计算公式; 根据临界水深的一般计算方法, 推导出了标准 I 型马蹄形断面临界水深的计算公式。【结果】提出了当水深分别位于底部弓形、下部扇形、顶拱半圆形断面内时, 断面形心至水面距离和水跃共轭水深的计算公式, 提出了临界水深的迭代公式, 并通过例题给出了计算过程。【结论】建立了标准 I 型马蹄形断面水跃共轭水深和临界水深计算公式, 该公式较简单, 可以直接应用于实际工程。

【关键词】 标准 I 型马蹄形断面; 水跃; 共轭水深; 临界水深

【中图分类号】 TV135.2⁺1

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2012)08-0230-05

Calculation of conjugate water depth in standard type I of horseshoe cross section

LI Ruo-bing, ZHANG Zhi-chang

(Institute of Water Resources and Hydro-electric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract: 【Objective】 The calculation methods of conjugate water depth and critical water depth in standard type I of horseshoe cross section are explored, providing a reference for engineering design. 【Method】 By blocking the calculated area and the distance between centroid and water surface, conjugate water depth calculation formulas of standard type I of horseshoe cross section under four operating conditions which is based on the basic equation of hydraulic jump are deduced in detail; on the basis of general method for calculating critical water depth, critical water depth formula of the standard type I of horseshoe section is derived. 【Result】 The distance between section centroid and water surface and conjugate water depth calculating formulas is raised when water depths respectively at the bottom of bow, lower fan-shaped, upper semi-round section, and iterative formulas of critical water depth are put forward too, the calculating process is supplied by the example. 【Conclusion】 The calculation formulas in this study are simple and can be applied to practical engineering.

Key words: standard type I of horseshoe cross section; hydraulic jump; conjugate water depth; critical water depth

标准 I 型马蹄形断面由四圆弧段组成, 即由底部的弓形、下部两侧的扇形以及顶拱半圆形组成^[1], 适应于围岩条件较差、侧向山岩压力较大的地质环

境, 其过流能力大于城门洞形断面, 是过水隧洞工程常用的断面形式, 但由于其断面形式复杂, 水力计算难度较大, 因此研究标准 I 型马蹄形断面水跃共轭

* [收稿日期] 2011-12-30

[作者简介] 李若冰(1988—), 女, 河南禹州人, 在读硕士, 主要从事水工水力学研究。E-mail: liruobing513@163.com

水深的计算方法具有重要的工程意义。

为了满足工程需要,早在 20 世纪 80 年代,文献[2]给出了标准 I 型马蹄形断面正常水深的计算表格。近年来,对马蹄形断面水力特性的研究取得了一些成果,这些成果主要集中在正常水深和临界水深的计算上。文献[3-5]给出了马蹄形断面正常水深的迭代公式和简化计算公式。对于临界水深,文献[6]给出了 $h_k=r, Q^2/r^5<26.131\ 3$ 和 $Q^2/r^5>26.131\ 3$ 等 3 种情况下标准 II 型马蹄形断面的计算公式;文献[7]给出了标准 II 型马蹄形断面的面积和水面宽度的计算公式;文献[8]通过迭代和逐步优化拟合,给出了标准 I 型和 II 型马蹄形断面隧洞临界水深的直接计算公式,该公式比较简单,最大误差为 1.59%;文献[9]也给出了马蹄形断面临界水深的直接计算公式;文献[10]研究了非标准马蹄形断面隧洞的临界水深,在分析中认为,马蹄形断面的底拱一般为半径很大的圆,可将其视为平底;文献[11]提出了马蹄形断面临界水深的一种计算方法;文献[12]给出了平底非标准马蹄形断面的水跃计算方法。

综观以上研究可以看出,目前尚无关于标准马蹄形断面水跃的研究成果。由于标准 I 型马蹄形断面在工程中较为常见,因此本研究从水跃的基本方程出发,详细推导了标准 I 型马蹄形断面共轭水深的计算方法,同时由于在水跃的判断中需用到临界水深,因此本研究也给出了临界水深的迭代计算公式,以期对马蹄形断面的设计与计算提供参考。

1 标准 I 型马蹄形断面的基本形式和圆心角

标准 I 型马蹄形断面如图 1 所示。由图 1 可见,在顶拱以下的弓形断面和扇形断面的半径均为 $3r$,顶拱的半径为 r ,下部弓形断面的圆心角为 2α ,侧面扇形圆心角为 α 。由图 1 中的几何关系可以解出,标准 I 型马蹄形断面的圆心角为常数。

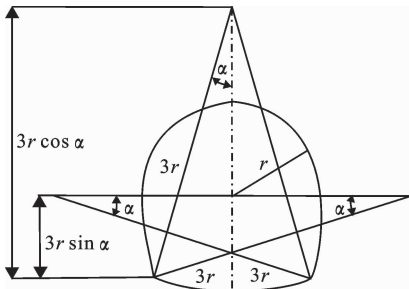


图 1 标准 I 型马蹄形断面示意图

Fig. 1 Standard type I of horseshoe cross section

2 标准 I 型马蹄形断面的水跃共轭水深

明渠水跃的基本方程^[13]为:

$$\frac{Q^2}{gA_{c1}}+A_{c1}h_{c1}=\frac{Q^2}{gA_{c2}}+A_{c2}h_{c2}。 \quad (1)$$

式中: Q 为流量, g 为重力加速度, A_{c1} 、 A_{c2} 分别为跃前和跃后断面面积, h_{c1} 、 h_{c2} 分别为跃前和跃后断面形心至水面的距离。

对标准 I 型马蹄形断面,其水跃共轭水深可能有以下几种情况:

1) 跃前断面水深位于底部弓形断面内,跃后水深位于下部扇形断面内(图 2)。

对于跃前断面,断面面积为:

$$A_{c1}=9r^2(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)。 \quad (2)$$

式中: φ 为当跃前断面水深为 h'_{c1} 时的半圆心角。

跃前断面形心至水面的距离 h_{c1} 的计算公式为:

$$h_{c1}=\frac{2}{3}\times\frac{(3r)^3\sin^3\varphi}{A_{c1}}-3r\cos\varphi。 \quad (3)$$

跃前断面水深 $h'_{c1}=3r(1-\cos\varphi)$ 。 (4)

对于跃后断面,为了求面积和形心至水面的距离,将断面分为 4 部分,即底部的弓形面积 A_1 、两侧的弓形面积 A_2 与 A_3 及中间的梯形面积 A_4 。 A_1 、 A_2 和 A_3 的计算公式分别为:

$$A_1=9r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)=0.150\ 639r^2, \quad (5)$$

$$A_2=A_3=9r^2[(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)]/2。 \quad (6)$$

由图 2 可以看出:

$$ab=6r\sin\alpha, \quad (7)$$

$$cd=6r\cos\beta-4r, \quad (8)$$

$$h=3r(\sin\alpha-\sin\beta), \quad (9)$$

$$A_4=(ab+cd)h/2=3r^2(3\sin\alpha+3\cos\beta-2)\times(\sin\alpha-\sin\beta)。 \quad (10)$$

各断面形心至水面的距离分别为:

$$y_{c1}=\frac{2}{3}\times\frac{(3r)^3\sin^3\alpha}{A_1}-2r-3r\sin\beta, \quad (11)$$

$$y_{c2}=y_{c3}=\frac{18r^3}{A_2}\cdot\sin^3\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-3r\sin\beta, \quad (12)$$

$$y_{c4}=\frac{h(2ab+cd)}{3(ab+cd)}。 \quad (13)$$

跃后断面形心至水面的距离为^[14]:

$$h_{c2}=\frac{A_1y_{c1}+A_2y_{c2}+A_3y_{c3}+A_4y_{c4}}{A_1+A_2+A_3+A_4}=\frac{C+D+E}{A_c}。 \quad (14)$$

式中: $C=r^3(0.138\ 979-0.451\ 917\sin\beta)$ 。 (15)

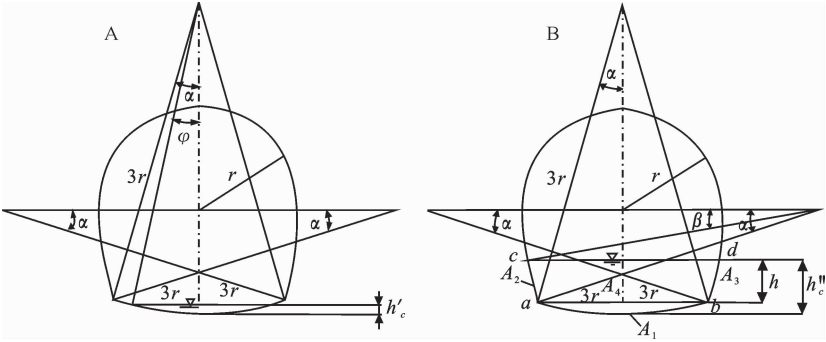


图 2 水深位于下部扇形断面内时跃前(A)、跃后断面(B)示意图

Fig. 2 Sketch map of the water depth and area before (A) and after the hydraulic jump (B)

$$D=36r^3\sin^3\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-27r^3\sin\beta[(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)], \quad (16)$$

$$E=3r^3(\sin\alpha-\sin\beta)^2(6\sin\alpha+3\cos\beta-2), \quad (17)$$

$$A_{c2}=r^2\{0.150\,639+9[(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)]+3(3\sin\alpha+3\cos\beta-2)(\sin\alpha-\sin\beta)\}, \quad (18)$$

$$\text{跃前断面水深 } h''_c=r(1-3\sin\beta). \quad (19)$$

2) 跃前断面水深位于底部弓形断面内, 跃后水深位于顶拱半圆断面内(图 3)。跃前断面面积和形心至水面的距离仍用公式(2)、(3)计算; 对于跃后断面, 将断面分为 7 部分, 其面积计算公式分别为:

$$A_1=9r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)=0.150\,639r^2, \quad (20)$$

$$A_2=A_3=9r^2(\alpha-\sin\alpha)/2=0.019\,076\,6r^2, \quad (21)$$

$$A_4=3r\sin\alpha\cdot(6r\sin\alpha+2r)/2=1.629\,2r^2, \quad (22)$$

$$A_5=A_6=r^2\theta/2, \quad (23)$$

$$A_7=r\sin\theta\cdot 2r\cos\theta/2=r^2\sin\theta\cos\theta. \quad (24)$$

式中: θ 为半径 r 与水平面的夹角。

各断面形心至水面的距离分别为:

$$y_{c1}=\frac{2}{3}\times\frac{(3r)^3\sin\alpha}{A_1}-r-(r-r\sin\theta)=0.922\,599r+r\sin\theta, \quad (25)$$

$$h_{c2}=\frac{0.848\,698+1.817\,962\,2\sin\theta+\theta\sin\theta-(4/3)\sin^2(\theta/2)+(1/3)\sin^2\theta\cos\theta}{1.817\,96+\theta+\sin\theta\cos\theta}\cdot r. \quad (31)$$

$$\text{跃后水深 } h''_c=r(1+\sin\theta). \quad (32)$$

3) 跃前断面水深处于下部扇形断面内, 跃后断面水深亦处于下部扇形断面内。跃前、跃后断面面积和形心至水面距离可用公式(14)、(18)计算。在利用该公式计算时, 应注意跃前断面形心至水面的距离为 h_{c1} , 断面面积为 A_{c1} 。

4) 跃前断面水深处于下部扇形断面内, 跃后水深处于顶拱半圆断面内。跃前断面面积和形心至水

$$y_{c2}=y_{c3}=\frac{2}{3}\times\frac{(3r)^3}{A_2}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+r\sin\theta=0.437\,32r+r\sin\theta, \quad (26)$$

$$y_{c4}=\frac{3r\sin\alpha(12r\sin\alpha+2r)}{3(6r\sin\alpha+2r)}+r\sin\theta=0.425\,39r+r\sin\theta, \quad (27)$$

$$y_{c5}=y_{c6}=r\sin\theta-\frac{4r\sin^2(\theta/2)}{3\theta}, \quad (28)$$

$$y_{c7}=r\sin\theta/3. \quad (29)$$

跃后断面总面积为:

$$A_{c2}=r^2(1.817\,96+\theta+\sin\theta\cos\theta). \quad (30)$$

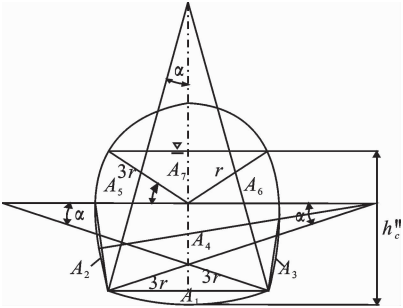


图 3 水深位于顶拱半圆断面内时跃后断面示意图

Fig. 3 Sketch map of water depth at the upper semi-round section after the hydraulic jump

跃后断面形心至水面的距离为:

面距离仍用公式(14)、(18)计算; 跃后断面面积和形心至水面距离可用公式(30)、(31)计算。

3 标准 I 型马蹄形断面临界水深的计算

临界水深的一般计算公式为^[15]:

$$\frac{A_k^3}{B_k}=\frac{Q^2}{g}. \quad (33)$$

式中: A_k 、 B_k 分别为临界水深对应的断面面积和水面宽度。

对于标准 I 型马蹄形断面,临界水深有 3 种情况。

1)当水深处于底部弓形断面内,其临界断面面积和水面宽度分别用下式计算:

$$A_k=9r^2(\varphi_k-\sin\varphi_k\cos\varphi_k), \tag{34}$$

$$B_k=6r\sin\varphi_k。 \tag{35}$$

将公式(34)、(35)代入(33)中,得迭代公式为:

$$\varphi_k=\left(\frac{Q^2\sin\varphi_k}{121.5gr^5}\right)^{1/3}+\sin\varphi_k\cos\varphi_k, \tag{36}$$

$$h_k=3r(1-\cos\varphi_k)。 \tag{37}$$

2)当水深处于下部扇形断面内,其临界断面面积和水面宽度分别用下式计算:

$$A_k=r^2(1.817\ 96-9\beta_k+12\sin\beta_k-9\sin\beta_k\cos\beta_k), \tag{38}$$

$$B_k=6r\cos\beta_k-4r。 \tag{39}$$

将公式(38)、(39)代入(33)中,得迭代公式为:

$$\beta_k=0.201\ 996+\frac{4}{3}\sin\beta_k-\sin\beta_k\cos\beta_k-\frac{1}{9}\left[\frac{Q^2(6\cos\beta_k-4)}{gr^5}\right]^{1/3}, \tag{40}$$

$$h_k=r(1-3\sin\beta_k)。 \tag{41}$$

3)当水深处于顶拱半圆断面内,其临界断面面积和水面宽度分别用下式计算:

$$A_k=r^2(1.817\ 96+\theta_k+\sin\theta_k\cos\theta_k), \tag{42}$$

$$B_k=2r\cos\theta_k。 \tag{43}$$

将公式(42)、(43)代入(33)中,得迭代公式为:

$$\theta_{k+1}=\frac{[(2Q^2\cos\theta_k/gr^5)^{1/3}-1.817\ 96]}{\theta_k+\sin\theta_k\cos\theta_k}\cdot\theta_k, \tag{44}$$

$$h_k=r(1+\sin\theta_k)。 \tag{45}$$

例题 1 标准 I 型马蹄形断面,已知顶拱半径 $r=5\text{ m}$,渠道过流量 $Q=290\text{ m}^3/\text{s}$,跃前断面水深 $h'_c=2.5\text{ m}$,试判断是否会发生水跃,若发生水跃,试计算跃后断面水深。

解:底部弓形断面高度为

$$h_1=3r(1-\cos\alpha)=3\times5\times$$

$$(1-\cos16.874\ 49^\circ)=0.648\ 586\text{ m}。$$

因为 $h_1<h'_c<r$,所以跃前水深位于下部扇形断面内,则可用式(14)、(18)、(19)分别计算跃前断面的夹角 β 、形心至水面距离和面积。

跃前断面水深为 $h'_c=r-3r\sin\beta$,则:

$$\beta=\arcsin[(5-2.5)/(3\times5)]=9.594\ 07^\circ。$$

$$h_{c2}=\frac{A_1y_{c1}+A_2y_{c2}+A_3y_{c3}}{A_1+A_2+A_3+A_4}=\frac{C+D+E}{A_{c2}}。$$

$$A_{c1}=5^2\times\{0.150\ 639+9\times[(16.874\ 49-9.594\ 07)^\circ\times\pi/180^\circ-\sin(16.874\ 49-9.594\ 07)^\circ]+3\times(3\sin16.874\ 49^\circ+3\cos9.594\ 07^\circ-2)\times(\sin16.874\ 49^\circ-\sin9.594\ 07^\circ)\}=20.797\ 76\text{ m}^2,$$

$$C=5^3\times(0.138\ 979-0.451\ 917\sin9.594\ 07^\circ)=7.957\ 44,$$

$$D=36\times5^3\times\sin^3\left(\frac{16.874\ 49-9.594\ 07}{2}\right)^\circ\times\sin\left(\frac{16.874\ 49+9.594\ 07}{2}\right)^\circ-27\times5^3\times$$

$$\sin9.594\ 07^\circ\times[(16.874\ 49-9.594\ 07)^\circ\times\pi/180^\circ-\sin(16.874\ 49-9.594\ 07)^\circ]=0.071\ 48,$$

$$E=3\times5^3\times(\sin16.874\ 49^\circ-\sin9.594\ 07^\circ)^2\times(6\sin16.874\ 49^\circ+3\cos9.594\ 07^\circ-2)=15.468\ 55。$$

跃前断面形心至水面距离为:

$$h_{c1}=\frac{C+D+E}{A_{c1}}=$$

$$\frac{7.957\ 44+0.071\ 48+15.468\ 55}{20.797\ 76}=1.129\ 81\text{ m}。$$

$$\frac{Q^2}{gA_{c1}}+A_{c1}h_{c1}=\frac{290^2}{9.8\times20.797\ 76}+$$

$$20.797\ 76\times1.129\ 81=436.120\ 46\text{ m}^3。$$

临界水深的一般计算公式为:

$$\frac{A_k^3}{B_k}=\frac{Q^2}{g}=\frac{290^2}{9.8}=8\ 581.633。$$

假定临界水深位于下部扇形断面内,则临界水深对应的断面面积和水面宽度分别用下式计算:

$$A_k=r^2(1.817\ 96-9\beta_k+12\sin\beta_k-9\sin\beta_k\cos\beta_k),$$

$$B_k=6r\cos\beta_k-4r。$$

假设 $\beta_k=0.512\ 68^\circ$,代入上式求得, $A_k=44.106\ 87\text{ m}^2$, $B_k=9.998\ 8\text{ m}$, $A_k^3/B_k=8\ 581.650\ 5\text{ m}$,与一般公式的计算值基本一致。由此求得临界水深为:

$$h_k=r(1-3\sin\beta_k)=$$

$$5\times(1-3\sin0.512\ 68^\circ)=4.997\ 66\text{ m}。$$

因为跃前断面水深 h'_c 小于临界水深 h_k ,所以在渠道中发生了水跃。

跃后水深仍假定在顶拱断面内,计算时假设一个 θ ,用公式(30)、(31)、(32)计算跃后断面面积和形心至水面距离,由公式(1)计算等式的右边,直至计算值与等式左边的值 $436.120\ 46$ 相等为止,计算结果为: $\theta=43.332\ 4^\circ$, $A_{c2}=72.934\ 18\text{ m}^2$, $h_{c2}=4.366\ 37\text{ m}$, $h''_c=8.431\ 15\text{ m}$ 。

4 结 语

根据水跃的基本方程,研究了标准Ⅰ型马蹄形断面在 4 种工况下水跃共轭水深和临界水深的计算方法,给出了详细的推导过程,通过实例说明了计算步骤,由于标准Ⅰ型马蹄形断面结构较为复杂,水深所处的位置不同,所得到的计算公式也有差异,所以在计算时首先要判断水深所处的位置,从而选择正确的计算公式。在计算时利用 Excel 可使计算非常简单。

[参考文献]

[1] 林继镛. 水工建筑物 [M]. 4 版. 北京:中国水利水电出版社, 2007:402-412.
Lin J Y. Hydraulic structure [M]. 4th edition, Beijing: China WaterPower Press, 2007:402-412. (in Chinese)

[2] 武汉水利电力学院水力学教研室. 水力计算手册 [M]. 北京:水利电力出版社,1983:399-409.
Wuhan University of Hydraulic Research Lab of Hydraulic and Electric Engineering Institute. Hydraulic calculation handbook [M]. Beijing: Water Conservancy Press, 1983: 399-409. (in Chinese)

[3] 吕宏兴,辛全才,花立峰. 马蹄形过水断面正常水深的迭代计算 [J]. 长江科学院学报,2001,18(3):7-10.
Lü H X, Xing Q C, Hua L F. Calculation on normal depth of horseshoe cross section by iterative method [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2001, 18(3): 7-10. (in Chinese)

[4] 张润生,刘学文,彭月琴. 马蹄形断面隧洞各水力要素的求解 [J]. 山西水利科技,1994(4):44-47.
Zhang R S, Liu X W, Peng Y Q. Hydraulic element solution of horseshoe section tunnel [J]. Shanxi Hydrotechnics, 1994(4): 44-47. (in Chinese)

[5] 腾 凯,刘继忠,李松岩,等. 马蹄形过水断面均匀流水深的简化计算方法 [J]. 人民黄河,1997(1):36-38.
Teng K, Liu J Z, Li S Y, et al. Simplified calculation method of uniform flow depth of the horseshoe cross section [J]. Yellow River, 1997(1): 36-38. (in Chinese)

[6] 李永刚. 马蹄形隧洞水力计算迭代法 [J]. 人民黄河, 1955 (11):42-44.
Li Y G. Iterative method of hydraulic calculation on horseshoe section tunnel [J]. Yellow River, 1955 (11): 42-44. (in Chi-

nese)

[7] 谭新莉. 马蹄形断面水力学计算 [J]. 新疆水利,2003(2):20-23.
Tan X L. Hydraulic calculation on horseshoe shaped section [J]. Xinjiang Water Resources, 2003(2): 20-23. (in Chinese)

[8] 王正中,陈 涛,芦 琴,等. 马蹄形断面隧洞临界水深的直接计算 [J]. 水力发电学报,2005,24(5):95-98.
Wang Z Z, Chen T, Lu Q, et al. The direct solution on critical depth of horseshoe section tunnel [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2005, 24(5): 95-98. (in Chinese)

[9] 张宽地,吕宏兴,陈俊英. 马蹄形断面临界水深的直接计算方法 [J]. 农业工程学报,2009,25(4):15-18.
Zhang K D, Lü H X, Chen J Y. Direct calculation of critical depth of horseshoe section tunnel [J]. Transactions of the CSAE, 2009, 25(4): 15-18. (in Chinese)

[10] 马吉明,梁海波,梁元博. 城门洞形及马蹄形过水隧洞的临界水流 [J]. 清华大学学报:自然科学版,1999,39(11):32-34.
Ma J M, Liang H B, Liang Y B. Critical flow in city-gate and horseshoe conduit [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 1999, 39(11): 32-34. (in Chinese)

[11] 赵延风,王正中,卢 琴. 马蹄形断面临界水深的一种计算公式 [J]. 农业工程学报,2011,27(2):28-32.
Zhao Y F, Wang Z Z, Lu Q. Simplified calculation formulas for critical water depth of horseshoe cross section [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2011, 27(2): 28-32. (in Chinese)

[12] 马吉明,谢省宗,梁元博. 城门洞形及马蹄形输水隧洞内的水跃 [J]. 水利学报,2000(7):20-24.
Ma J M, Xie S Z, Liang Y B. Hydraulic jumps in rectangular conduit with circular upper wall and horseshoe tunnel [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000 (7): 20-24. (in Chinese)

[13] 张志昌. 水力学:下册 [M]. 北京:中国水利水电出版社, 2011:69-90.
Zhang Z C. Hydraulics: II [M]. Beijing: China Water Power Press, 2011:69-90. (in Chinese)

[14] 单辉祖. 材料力学教程 [M]. 北京:高等教育出版社,2007:321-340.
Shan H Z. Material mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007: 321-340. (in Chinese)

[15] 清华大学. 水力学:修订本上册 [M]. 北京:高等教育出版社, 1980.
Tsinghua University. Hydraulics: Revised edition [M]. Beijing: Higher Education Press, 1980. (in Chinese)