

黄土增湿湿陷的非线性本构方程研究

刘金禹¹, 邢义川², 张爱军¹

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100; 2 中国水利水电科学研究院, 北京 100044)

【摘要】 **【目的】**建立黄土增湿湿陷本构方程, 为黄土增湿湿陷变形的数值计算提供理论基础。**【方法】**在三轴等应力比分级浸水试验的基础上, 应用 Sigmoid 的 3 参数方程, 对不同含水率条件下平均应力 p 与湿陷体积应变 ϵ_v^d 及偏应力 q 与湿陷偏应变 ϵ_r^d 之间的关系分别进行回归分析, 从而得到不同含水率条件下 Sigmoid 函数 3 个参数的回归值, 分析 3 个参数回归值与含水率之间的函数关系, 建立黄土增湿湿陷的非线性本构方程, 并利用该方程求导计算黄土增湿时的材料参数。**【结果】**应用上述函数回归方法分别得到了不同含水率条件下平均应力 p 与湿陷体积应变 ϵ_v^d 之间及偏应力 q 与湿陷偏应变 ϵ_r^d 之间的本构方程表达式, 反算分析表明该本构方程是有效的。**【结论】**Sigmoid 函数的 3 参数方程能较好地反映黄土增湿湿陷的变形行为, 其表达式简单明了, 由该方程得出的材料参数易于使用。

【关键词】 黄土; 增湿湿陷; 本构方程

【中图分类号】 TU 444

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2011)01-0210-05

Study of non-linear constitutional equation for humidifying collapse loess

LIU Jin-yu¹, XING Yi-chuan², ZHANG Ai-jun¹

(1 College of Water Resource and Architecture Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 China Institution of Water Resource and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

Abstract: **【Objective】** The study was conducted to establish a constitutional equation for loess during humidifying collapse to provide theoretical foundation for numerical calculation of loess's humidifying collapse deformation. **【Method】** Based on grading immersion triaxial test on the condition of equal stress ratio, the paper applied three-parameter Sigmoid equation to fit the relation between average stress p and collapse volumetric strain ϵ_v^d and the relation between deviator stress q and deviator strain ϵ_r^d on the conditions of different water contents respectively, and then the three specific parameters of Sigmoid equations were gained. Later, the functional relation between those values of three parameters and water contents was built. Finally, the non-linear constitutional equation for humidifying collapse loess was acquired. Through this equation derivation and calculation, material parameters for humidifying collapse loess could be gained. **【Result】** Using above-mentioned regression method, constitutional equations for the relation between average stress p and collapse volumetric strain ϵ_v^d and the relation between deviator stress q and deviator strain ϵ_r^d on the condition of different water contents were obtained respectively. Validity of those constitutional equations were proved by back calculation analytical method. **【Conclusion】** This three-parameter Sigmoid equation is simple and easy to use which can express transformation behavior of collapsible loess commendably.

Key words: loess; humidifying collapse; constitutional equation

* [收稿日期] 2010-10-29

[基金项目] 国家自然科学基金项目(50779058)

[作者简介] 刘金禹(1974—), 男, 天津武清人, 工程师, 在读硕士, 主要从事土工试验及特殊土的工程性质研究。

E-mail: ljj310@nwsuaf.edu.cn

半个多世纪以来,黄土对水的特殊敏感性及其在黄土变形、强度和本构关系等力学性能上的表现,一直是黄土力学特性研究的中心^[1],其中以浸水饱和时的湿陷性来评价湿陷性黄土的工程性质,是该类研究的核心问题,被称为极限状态下的黄土湿陷性课题^[2]。正确反映和预测湿陷性黄土的力学性质和行为,较为准确地模拟其在各类工程复杂环境下的变形、强度和稳定性,全面而深入地研究黄土增湿变形的发展规律及其在黄土工程中应用的本构模型是十分必要且有意义的。因此,国内不少学者对黄土增湿湿陷的本构模型进行了研究^[3],使得黄土增湿湿陷本构模型从线弹性模型发展到非线性弹性增量模型,再到目前的弹塑性模型^[4-5],近年来,随着人们对黄土结构性特性研究的进一步深入,又相继出现了湿陷性黄土结构损伤演化模型^[6]和结构性参数本构模型^[7]等。然而由于非线性弹性增量模型大多是在 K_0 固结或常规三轴应力状态下,通过对不同初始含水率土样进行试验的基础上建立起来的,该类模型不符合复杂应力状态下黄土逐渐增湿湿陷的变形行为;同时,在复杂应力状态下建立的本构模型,如弹塑性模型、结构损伤演化模型和结构性参数本构模型,均存在模型关系复杂、参数较难确定的不足。为此,本研究以三轴等应力比分级浸水试验为基础,应用函数拟合方法建立了张桥黄土增湿湿陷的非线性本构模型方程,以期为黄土增湿变形的预测与模拟研究提供参考。

1 湿陷性黄土变形模型的一般形式

湿陷变形的本构关系较土的一般情况复杂。它是力、水和土材料耦合作用的结果,其大小必然与应力状态(σ_{ij})、初始含水量(ω_0)、初始干密度(ρ_d)和浸水量($\Delta\omega$)密切相关。

对于湿陷性黄土的本构关系,可以表示为:

$$\epsilon_{ij}^s = f(\rho_d \cdot \omega_0 \cdot \Delta\omega \cdot \sigma_{ij})。 \quad (1)$$

式中: ϵ_{ij}^s 为湿陷变形张量, ρ_d 为土的干密度, ω_0 为土的初始含水率, $\Delta\omega$ 为浸水量, σ_{ij} 为应力张量。

对于某一具体的湿陷性黄土,即 ω_0 、 ρ_d 一定,则其本构关系可以简化表示为:

$$\epsilon_{ij}^s = f(\omega, \sigma_{ij})。 \quad (2)$$

在浸水完全饱和时,最终湿陷变形的本构关系可以表示为:

$$\epsilon_{ij}^s = f(\sigma_{ij})。 \quad (3)$$

若忽略应力 Lode 角的影响,应力张量 σ_{ij} 常应

用 p 、 q 应力体系表示,则(2)式可表示为

$$\epsilon_{ij}^s = f(\omega, p, q)。 \quad (4)$$

式中: ω 为进水后土的含水率; p 为静水压力; q 为广义剪应力或偏应力。在三轴应力状态下 $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$, $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$, 其中 σ_1 和 σ_3 分别为第 1 和第 3 主应力。

在现行规范中,关于黄土湿陷变形计算的本构关系就采用式(3)的形式,认为湿陷发生时土体处于完全饱和状态。然而大量的室内室外研究表明,湿陷性黄土的湿陷变形伴随着土体含水率的变化而变化^[3,8]。土的含水率变化是湿陷性黄土发生湿陷的诱因,发生湿陷变形的土体并不一定达到完全饱和状态,并且随土含水率变化的湿陷变形行为表现为非线性,而式(3)并不能描述湿陷变形的非线性特点和发生湿陷的过程,不符合湿陷性黄土发生湿陷的实际情况。因此研究土体随含水率变化的变形特性更为实际且更有意义,文献[9-14]已在这方面做了一些有意义的研究工作,其中三轴等应力比分级浸水试验从应力状态和增湿条件上来看,比较符合实际并易于应用式(4)进行描述。

2 三轴等应力比分级浸水试验

三轴等应力比分级浸水试验的研究方法在文献[15]中已有论述,在此只作简单介绍。试验仪器采用应力控制式非饱和土三轴仪,轴向应力由气压力应力头来施加,周围压力为水压,仪器总的压力源由空气压力机提供,使用自动伺服压力调节阀自动调节施加在试样上的轴向压力和围压,使压力系统实现等应力比控制,满足试验对应力状态的要求。陶土板镶嵌在压力室底座上,以便对土样的孔隙水压力进行监测。孔隙水压力由水压力传感器测量,在试验前对传感器的零漂、温漂和精度以及重复性进行检验。陶土板进气值大于 250 kPa,仪器调试时应对陶土板的进气值和陶土板嵌入三轴压力室底座是否粘结良好进行检验。同时,另配一压力室和加压系统,在每一组试验进行之前用其对底座上的陶土板进行反压饱和,以排除陶土板内及孔隙水压力测试系统的气泡。分级进水孔和孔隙气压力传感器均设在试样帽上。

试验土样取自黄土台塬区陕西省渭南市交口镇的张桥抽水站,取样深度为 5.0 m,共取原状土样 10 组,土样的物理力学性质见表 1。试样由原状土样削制而成,高 8.0 cm,直径 3.91 cm。

表 1 张桥黄土的物理力学性质

Table 1 Physico-mechanical properties of Zhangqiao loess

初始含水率/% Initial water content	初始干密度/ (g·cm ⁻³) Initial dry density	比重 Specific gravity	液限/% Liquid limit	塑限/% Plastic limit	自重湿陷系数/% Coefficient of self-weight collapsibility
10.0	1.36	2.70	28.0	16.3	0.0868

试验中,先将试样按一定应力比 $k(k=\sigma_3/\sigma_1=0.5)$ 加载到一定的偏应力 $q=50\text{ kPa}$,待压缩变形稳定后维持该应力状态不变,然后分级浸水使试样的含水率分别达到 $15.0\%,17.5\%,20.0\%,22.5\%,25.0\%,27.5\%$ 等。在每级浸水阶段均测定其孔隙水压力和孔隙气压力,并需待每级变形稳定后再浸下一级水,直至各级含水率加完并稳定为止。浸水过程中,使进水速度尽可能小,以避免出现局部过湿而影响试验结果,并要求稳定时间足够长。稳定标准按位移量表读数 60 min 不超过 0.005 mm 和孔隙压力显示器读数 60 min 不超过 0.5 kPa 来控制。孔隙压力稳定表明试样孔隙中水、气迁移及扩散趋于稳定,也表明试样中含水率沿试样高度的分布趋于稳定。

浸水前试样压缩变形的固结稳定值 ϵ_0 与每级浸水稳定的变形值 ϵ_i 之差,即为某一应力状态 σ_{ij} 下各级含水率 ω_i 的湿陷变形,如图 1 所示。用计算式可表示为:

$$\begin{aligned}\omega_1:\epsilon_1^{\text{sh}} &= \epsilon_1 - \epsilon_0; \\ \omega_2:\epsilon_2^{\text{sh}} &= \epsilon_2 - \epsilon_0; \\ &\vdots \\ \omega_i:\epsilon_i^{\text{sh}} &= \epsilon_i - \epsilon_0.\end{aligned}\tag{5}$$

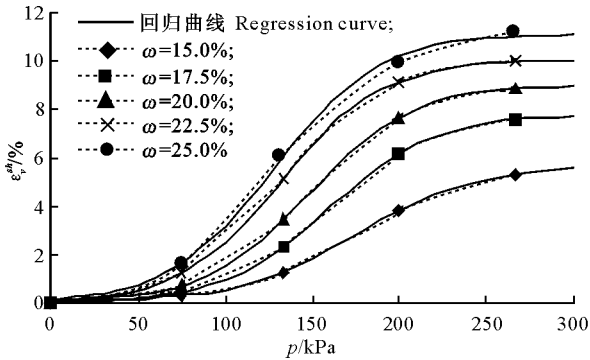


图 2 张桥黄土 $\epsilon_v^{\text{sh}}-p$ 关系曲线
Fig. 2 Curve of $\epsilon_v^{\text{sh}}-p$ of Zhangqiao loess

3 结果与分析

对上述试验结果,可以应用 Sigmoid 3 参数模型方程来表达图 2 和图 3 中的应力与应变关系,图 2、3 中实线曲线为该函数的回归曲线。Sigmoid 3

由以上处理可分别得到不同浸水含水率 ω_i 对应的轴向湿陷变形 ϵ_1^{sh} 及湿陷体积应变 ϵ_v^{sh} 。由下式可以计算出相应的湿陷偏应变 ϵ_r^{sh} ,即:

$$\epsilon_r^{\text{sh}} = \epsilon_1^{\text{sh}} - 1/3\epsilon_v^{\text{sh}}.\tag{6}$$

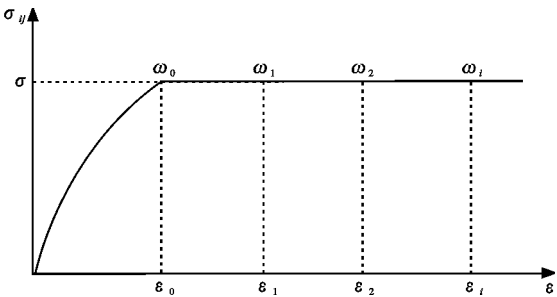


图 1 黄土增湿湿陷变形示意图
Fig. 1 Sketch map of humidifying collapse deformation

通过上述试验可以得到一系列的数据点(不同含水率、不同应力比),从而可以得到数个应力比 k 为常量,含水率 ω 为参量,平均应力 p 与湿陷体积应变 ϵ_v^{sh} 及偏应力 q 与偏应变 ϵ_r^{sh} 的数组关系曲线。如果以含水率 ω 为常量,应力比 k 为参量,可以得到等应力比条件下,平均应力 p 与湿陷体积应变 ϵ_v^{sh} 及偏应力 q 与偏应变 ϵ_r^{sh} 的数组关系曲线。由此可得陕西张桥自重湿陷性黄土的典型试验曲线如图 2、3 所示。

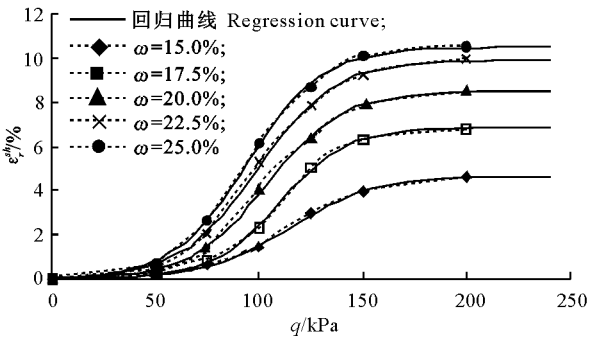


图 3 张桥黄土 $q-\epsilon_v^{\text{sh}}$ 关系曲线
Fig. 3 Curve of $q-\epsilon_r^{\text{sh}}$ of Zhangqiao loess

参数方程的表达式为:

$$y = a / (1 + e^{-\frac{x-x_0}{b}}).\tag{7}$$

式中: x_0 、 a 和 b 为试验数据拟合的 3 个参数。对于上述试验数据,将 y 视为湿陷体积应变 ϵ_v^{sh} (或湿陷偏应变 ϵ_r^{sh}),将 x 视为平均应力 p (或偏应力 q)。对

试验数据用方程(7)进行拟合,可以得到方程中的拟合参数。对于不同含水率条件下的试验曲线即可以

表 2 不同含水率条件下张桥黄土平均应力与湿陷体积应变 Sigmoid 函数的 3 个拟合参数

Table 2 Parameter list of Sigmoid function between average stress p and collapse volumetric strain ϵ_v^d at different water contents

含水率/% Water content	参数 Parameter		
	a	b	x_0
15.0	5.7	34.6	175.6
17.5	7.8	30.9	159.8
20.0	9.1	30.5	148.1
22.5	10.1	29.2	132.2
25.0	11.2	30.5	128.6

最后,对上述回归参数与含水率建立函数关系。经过函数回归得到含水率与 3 参数之间的函数关系

表 4 Sigmoid 函数的参数与含水率的关系

Table 4 Relationship between parameter of Sigmoid function and water content

Sigmoid 函数的参数 Parameter of Sigmoid function	平均应力与湿陷体积应变 Average stress and collapse volumetric strain		偏应力与湿陷剪应变 Deviator stress and collapse deviator strain	
	函数 Function	决定系数(R^2) Coefficient of determination	函数 Function	决定系数(R^2) Coefficient of determination
	$a=10.51 \ln \omega-22.53$	0.99	$a=11.81 \ln \omega-27.13$	0.98
b	$b=0.10 \omega^2-4.56 \omega+79.36$	0.94	18.14	—
x_0	$x_0=993.04 \omega^{-0.639}$	0.98	$x_0=332.45 \omega^{-0.39}$	0.99

应用表 4 和方程(7)就可以获得应力比 $k=0.5$ 时某一含水率条件下的增湿湿陷曲线。表 4 中的决定系数 R^2 均接近于 1,表明 Sigmoid 函数 3 个参数与含水率之间的相关程度较高。由于表 3 中的参数 b 与土样含水率的相关程度较差,又由于不同含水率条件下参数 b 的数值相差不大,故表 4 中偏应力

得到不同的拟合参数,其结果如表 2 和表 3 所示。

表 3 不同含水率条件下张桥黄土偏应力与湿陷剪应变 Sigmoid 函数的 3 个拟合参数

Table 3 Parameter list of Sigmoid function between deviator stress q and collapse deviator strain ϵ_r^d at different water contents

含水率/% Water content	参数 Parameter		
	a	b	x_0
15.0	4.6	20.1	115.0
17.5	6.8	16.1	109.8
20.0	8.5	18.0	103.5
22.5	9.9	18.7	99.2
25.0	10.5	17.8	94.3

如表 4 所示。

与湿陷剪应变的 Sigmoid 函数的参数 b 取用平均值。应用函数反分析的方法将含水率为 17.5% 的数据反算出来后,将反算数据与试验结果数据进行对比,其结果见图 4。由图 4 可知,上述方法能较好地描述张桥黄土在含水率连续变化时的湿陷变形行为。

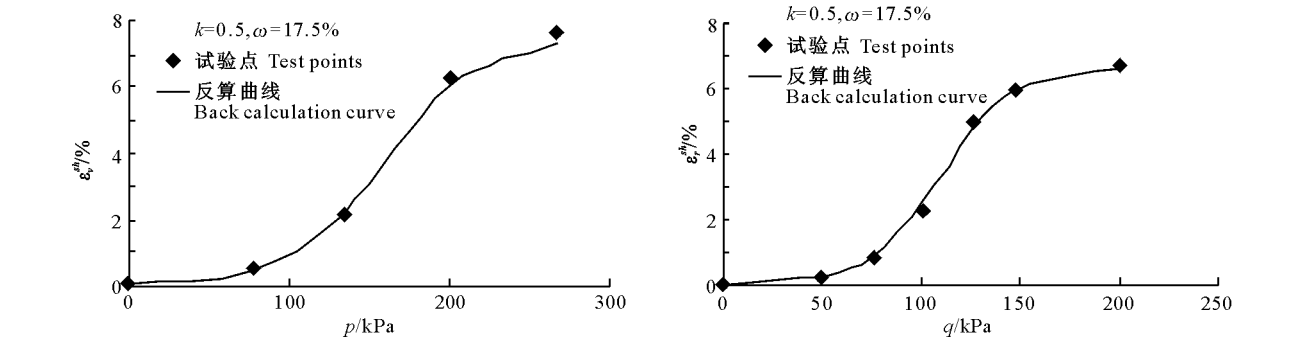


图 4 $k=0.5, \omega=17.5\%$ 时张桥黄土 ϵ_v^d-p 和 ϵ_r^d-q 反算曲线与试验数据点的比较

Fig. 4 Compare between back calculation curves of ϵ_v^d-p and ϵ_r^d-q with test data points of Zhangqiao loess when $k=0.5, \omega=17.5\%$

依据切线体积变形模量 K 和切线剪切模量 G 的定义,有:

$$K=\frac{\partial p}{\partial \epsilon_v},$$
$$G=\frac{\partial q}{\partial \epsilon_r}.$$

(8)

式中: ϵ_v 为体积应变, ϵ_r 为偏应变。

有了上述模型方程的表达式,再依据式(8),可以得到湿陷性黄土的材料性质参数。因此对式(7)中的 x 对 y 求导,可以得到黄土材料的湿陷切线体积变形模量 K^d 或湿陷切线剪切模量 G^d 的通用表

达式为:

$$K^{sh} \text{ (或 } G^{sh}) = \frac{b[1 + e^{-\frac{(x-x_0)}{b}}]^2}{ae^{-\frac{(x-x_0)}{b}}} \quad (9)$$

式(9)反映了湿陷性黄土材料性质的高度非线性。将表 4 中的函数关系式分别代入式(9)就可计算出某一应力状态下黄土增湿时的 $K^{sh}-G^{sh}$ 模型参数。

另外,在理想弹性体条件下又有如下关系:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9KG}{G+3K}; \\ \mu &= \frac{3K-2G}{2G+6K} \end{aligned} \quad (10)$$

式中: E 和 μ 分别为材料的切线弹性模量和泊松比。

将式(10)中的 K 、 G 用 K^{sh} 、 G^{sh} 代替就可以计算出黄土增湿时的邓肯-张 $E-\mu$ 模型参数。由于邓肯-张 $E-\mu$ 模型在岩土有限元计算中已得到广泛的应用,因此可以应用邓肯-张 $E-\mu$ 模型来分析计算黄土逐渐增湿时的湿陷变形行为。

4 结 论

通过对陕西省渭南市交口镇张桥湿陷性黄土进行三轴等应力比分级浸水试验,得到了不同含水率条件下平均应力与湿陷体积应变及偏应力与湿陷剪应变之间的应力应变关系,应用 Sigmoid 函数的 3 参数方程对试验得出的应力应变关系进行回归,得到了土样不同含水率条件下 Sigmoid 函数中 3 个参数的回归值,对这 3 个参数的回归值与含水率分别建立了函数关系,应用反算对比分析可知,Sigmoid 函数方程能较好地描述张桥黄土在含水率连续变化时的湿陷变形行为。最后对 Sigmoid 函数的 3 参数方程进行求导,就可以很简单地计算出黄土湿陷时的材料参数,进而可以应用这些参数对黄土增湿变形进行数值分析与计算。

[参考文献]

[1] 刘祖典. 黄土湿陷变形量计算方法的改进 [J]. 岩土工程技术, 2001(3):138-139.
Liu Z D. The improvement of computational method for loess collapsibility [J]. Geotechnical Engineering Technique, 2001 (3):138-139. (in Chinese)

[2] 刘祖典. 黄土力学与工程 [M]. 西安:陕西科技出版社,1996.
Liu Z D. Loess mechanics and engineering [M]. Xi'an:Shaanxi Science and Technology Press,1996. (in Chinese)

[3] 邢义川. 黄土力学性质研究的发展与展望 [J]. 水力发电学报, 2000(4):54-63.
Xing Y C. The development and outlook of loess mechanical

properties research [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2000(4):54-63. (in Chinese)

[4] 谢定义. 黄土力学特性与应用研究的过去、现在与未来 [J]. 地下空间,1999,19(4):273-284.
Xie D Y. The past, present and future of the research on mechanical characteristics and application of loess [J]. Chinese Journal of Underground Space,1999,19(4):273-284. (in Chinese)

[5] 周凤玺,米海珍,胡燕妮. 黄土湿陷变形本构关系研究 [J]. 兰州理工大学学报,2005,31(4):116-119.
Zhou F X, Mi H Z, Hu Y N. Study of constitutive law for collapsible deformation of loess [J]. Journal of Lanzhou University of Technology,2005,31(4):116-119. (in Chinese)

[6] 邵生俊,李彦兴,周飞飞. 湿陷性黄土结构损伤演化特性 [J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(24):4161-4165.
Shao S J, Li Y X, Zhou F F. Structural damage evolvement properties of collapsible loess [J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering,2004,23(24):4161-4165. (in Chinese)

[7] 邵生俊,龙吉勇,于清高,等. 湿陷性黄土的结构性参数本构模型 [J]. 水利学报,2006,37(11):1315-1322.
Shao S J, Long J Y, Yu Q G. A constitutive model of collapsible loess with structural parameter [J]. Journal of Hydraulic Engineering,2006,37(11):1315-1322. (in Chinese)

[8] 张 炜,张苏民. 我国黄土工程性质的发展 [J]. 岩土工程学报,1995,17(6):80-88.
Zhang W, Zhang S M. Development of loess engineering properties research in China [J]. Journal of Geotechnical Engineering,1995,17(6):80-88. (in Chinese)

[9] 张茂花,谢永利,刘保健. 增(减)湿时黄土的湿陷系数曲线特性 [J]. 岩土力学,2005,26(9):1363-1368.
Zhang M H, Xie Y L, Liu B J. The curve properties of coefficient of loess collapsibility during humidifying(dehumidifying) [J]. Rock and Soil Mechanics,2005,26(9):1363-1368. (in Chinese)

[10] 卫晓英,孟宪侵. 浅析湿陷性黄土增湿变形 [J]. 山西建筑, 2000(3):4-5.
Wei X Y, Meng X Q. Shallow analysis collapsible loess humidification deformation [J]. Shanxi Architecture, 2000(3):4-5. (in Chinese)

[11] 郭敏霞,张少宏,邢义川. 非饱和原状黄土湿陷变形及孔隙压力特性 [J]. 岩石力学与工程学报,2000,19(6):785-788.
Guo M X, Zhang S H, Xing Y C. Collapse deformation and pore pressure characteristics of unsaturated intact loess [J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering,2000,19(6):785-788.

[12] 张洪萍,包卫星. 增减湿黄土压缩与湿陷变形特征初探 [J]. 山西建筑,2005,31(5):50-51.
Zhang H P, Bao W X. First exploration of compression and collapsibility deformation properties of loess during humidifying and dehumidifying [J]. Shanxi Architecture, 2005, 31 (5):50-51. (in Chinese)