

基于MATLAB的渠道土方计算*

张宽地¹, 吕宏兴¹, 马希明¹, 崔宁博^{1,2}

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

2 西北农林科技大学 旱区农业水土工程教育部重点实验室, 陕西 杨凌 712100)

[摘要] 针对现有渠道土方计算方法的不足, 基于MATLAB 强大的数学计算功能和简单的语言特点, 提出用三次样条函数拟和渠道挖填断面的面积函数, 再运用 Romberg 积分法计算渠道土方量的新方法。算例结果表明, 该方法计算结果误差小、精度高、算法简单, 可供设计人员参考。

[关键词] 渠道土方计; 三次样条插值; Romberg 积分法; MATLAB 程序

[中图分类号] TV 541. 02

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2006)06-0155-04

探求一种精度高、计算过程简捷、适于计算机完成的土方计算是当代水工设计面临的一项基础性课题, 这对提高设计效率和设计质量有深远的影响。迄今为止, 土方计算的核心仍为平均断面法, 该方法简单明了, 便于计算, 但计算的误差较大, 最大误差甚至超过 10%^[1-2]。近年来, 随着计算机技术的日新月异, 我国学者在探求新的计算方法方面做了大量研究^[1-4], 相继提出了三次样条函数拟和法、二次 B 样条函数拟和法等数值解法, 这些方法在一定程度上减少了计算误差, 提高了计算精度, 弥补了传统方法的缺陷, 但数值解法在提高精度的同时, 计算量大大增加, 尤其是拟和函数的寻求相当复杂。为此, 本文基于 MATLAB 强大的数学计算功能和友好的设计界面, 提出了用三次样条函数拟和断面面积, 再用 Romberg 积分法计算渠道土方量的新方法, 以期为渠道土方的简捷、准确计算提供参考。

1 三次样条曲线拟和断面面积函数

渠道工程属于线形土方工程。实际上沿渠道中心线的原地形线是连续却不一定光滑的曲线, 但由于在渠道测量中, 当地形变化较大时, 往往多布置桩号, 使两桩号间的地面线尽量为直线, 故可以将沿渠道的地面线看作连续光滑的平面曲线, 则关于渠道长度的填方和挖方断面面积函数曲线也是连续光滑的, 因此可以采用数学特性良好、计算稳定的三次样

条插值函数对其进行拟合。

在渠道土方计算中, 各施测桩号对应坐标值 $a = l_1 < l_2 < l_3 \dots < l_n = b$, 每一桩号 l_1, l_2, \dots, l_n 都对应 1 个渠道填方或挖方断面面积 A_1, A_2, \dots, A_n 。因此, 可以构造一个断面面积性质的样条函数 $s(l)$ 逼近真实面积函数 $A(l)$, 并满足^[3, 5-6]:

$$s(l) \in C^2[a, b];$$

$$s(l) \text{ 在每个子区间 } [l_{i-1}, l_i] \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

上是 1 个三次多项式;

$s(l_i) = A_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 即意味函数代表的曲线通过所有的点 (l_i, A_i) 。

如果记 $s(l_i) = M_i (i = 2, 3, \dots, n)$, 由于 $s(l)$ 在每 1 个区间 $[l_{i-1}, l_i]$ 上是三次代数多项式, 故 $s(l)$ 在子区间上为线性函数, 可表示为^[5-6]:

$$s(l_i) = M_{i-1} \frac{l_i - l}{h_{i-1}} + M_i \frac{l - l_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad (1)$$

式中, $h_{i-1} = l_i - l_{i-1}$ 。对上式积分 2 次, 并利用插值条件 $s(l_{i-1}) = A_{i-1}, s(l_i) = A_i$, 可得三次样条曲线 M 的表达式:

$$s(l) = M_{i-1} \frac{(l_i - l)^3}{6h_{i-1}} + M_i \frac{(l - l_{i-1})^3}{6h_{i-1}} + (A_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_{i-1}^2}{6}) \frac{l_i - l}{h_{i-1}} + (A_i - \frac{M_i h_{i-1}^2}{6}) \frac{l - l_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad (2)$$
$$l \in [l_{i-1}, l_i]$$

* [收稿日期] 2005-10-11
[基金项目] 中科院黄土高原土壤侵蚀与旱地农业国家重点实验室开放基金项目(10501-141); 西北农林科技大学青年教师重点基金项目(080807)
[作者简介] 张宽地(1978-), 男, 宁夏隆德人, 助教, 在读硕士, 主要从事坡面水流及水工水力学研究。
[通讯作者] 吕宏兴(1955-), 男, 陕西陇县人, 教授, 博士生导师, 主要从事水力学与河流动力学研究。E-mail: Luhongxing@sohu.com

利用函数 $s(l)$ 在样点 l_i 处具有连续二阶导数的条件,再根据三次自然样条插值法,增加自然边界条件:

$$\begin{aligned} s(l_1) &= 0, \\ s(l_n) &= 0. \end{aligned}$$

为了满足自然边界条件,可在渠道首端与末端多布置桩号,使首端及末端几个桩号处断面形式及断面面积尽量保持不变(这在实际工程中不难做到)。由此,可得下列方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & u_0 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & u_1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & u_{n-1} \\ & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{式中,} \begin{cases} u_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ \lambda = 1 - u_i \\ d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{A_{i+1} - A_i}{h_{i+1}} - \frac{A_i - A_{i-1}}{h_i} \right) \end{cases},$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

解上述方程,可得 $M_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 。将之代入式(2),即可得到每个子区间 $[l_{i-1}, l_i] (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 上的三次样条函数。

2 利用 Romberg 积分法计算土方量

Romberg 积分法是根据两种步长计算的结果进行截断误差估计,再将估计误差加到计算结果中得出改进的近似积分,以此循环计算积分的方法。在实际操作中经常以复化梯形积分公式的计算结果为基础进行计算,复化梯形积分公式^[6]

$$T(h) = h \left(\frac{1}{2} A_0 + \sum_{j=1}^{m-1} A_j + \frac{1}{2} A_n \right), \quad (4)$$

式中, $T(h)$ 为梯形求积和式; h 为积分步长; $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$; A_0 为初始断面面积; A_n 为终止断面面积; A_j 可通过插值得到。

由外推极限法可证^[7]

$$T(h) = I[f] + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots, \quad (5)$$

式中, $I[f]$ 为某一步长梯形积分值; c_i 为常数。

由此可见, $I[f] = T(0) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ 。因而,如果算得 $T(h_0), T(h_1), T(h_2), \dots$, 则由外推极限法的计算公式知

$$I[f] = T_k^T = T_{k-1}^T + \frac{T_{k-1}^T - T_{k-2}^T}{(h_{\tau}/h_{\tau_k})^2 - 1}, \quad (6)$$

式中, τ 表示步长缩小的次数; $T_0^T, T_1^T, T_2^T, T_3^T, \dots$ 表示 $T(h_{\tau}), S(h_{\tau}), C(h_{\tau}), R(h_{\tau}), \dots$, 当 $h_{\tau} = h_{\tau-1}/2$ 时上式可变为

$$I[f] = T_k^T = T_{k-1}^T + \frac{T_{k-1}^T - T_{k-2}^T}{4^k - 1}. \quad (7)$$

根据上式可知

$$S(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{4 - 1},$$

$$C(h) = S(h) + \frac{S(h) - S(2h)}{4^2 - 1}, \quad (8)$$

$$R(h) = C(h) + \frac{C(h) - C(2h)}{4^3 - 1},$$

式中, $S(h)$ 为辛普森积分和式; $C(h)$ 为复化柯特斯积分和式; $R(h)$ 为改进 Romberg 积分和式。它们分别等于 $T(h), S(h), C(h)$ 加上估计误差,利用该积分和式可计算渠道挖填土方量。

3 扭面土方量计算的 MATLAB 实现

综上所述,渠道土方计算中断面函数的拟和与积分都相当复杂,一般需要编写程序来实现,本文采用 MATLAB 软件实现土方计算,以简化计算过程。用 MATLAB 程序计算渠道土方量的步骤为^[8]:

产生测施桩号和对应的断面面积矩阵;

产生插值精度矩阵(在桩号的最小值与最大值之间以一定步长产生矩阵);

调用 MATLAB 中的三次样条插值函数产生插值矩阵;

用 Romberg 积分法计算渠道土方量。

4 算例

本文引用文献[1]中长度 $L = 400 \text{ m}$, 渠深 $H = 3 \text{ m}$, 渠道设计比降 $i = 0$, 渠道中心地面线 $h = 3(L - 200)^2/40000$ 所确定的抛物线算例(图 1, 计算原始数据见表 1 的前 5 栏), 分别用本文所述算法和平均断面法进行计算, 计算结果如表 1 所示, 其中实际土方量采用积分法算出^[6-7, 9], 并列出了文献[1]的计算结果, 以便比较。

从表 1 可以看出, 平均断面法的计算误差较大, 最大误差高达 6.7%, 文献[1]的计算方法虽然误差仅为 0.4%, 但该方法计算过程复杂, 尤其是二次 B 样条函数的寻求需要编写专门的程序来完成。而本文算法只需调用简单的程序, 且最大误差仅为 0.27%。由此可见, 本文算法具有计算精度高、计算过程简单的优点。

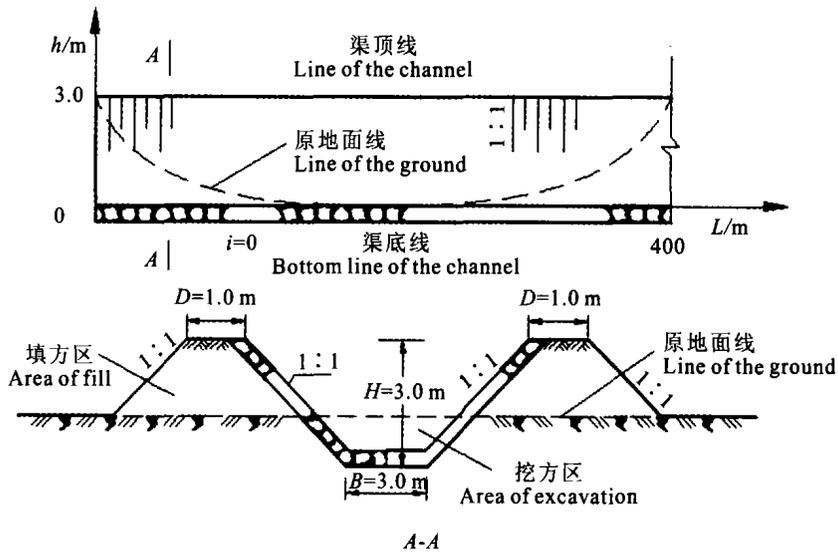


表 1 土方计算结果(桩距 50 m)

Table 1 Earthwork calculations result (pile space 50 meters)

桩号/m Stake Number	地面高程/m Ground elevation	渠底设计 高程/m Design elevation of channel bottom	断面面积/m ² Cross section area		土方量/m ³ Earthwork volume									
			填方面积 Fill area	挖方面积 Excava- tion area	实际土方量 Practical earth volume		平均断面法 Average cross- section method		文献[1]计算法 Reference [1] calculation method		本文计算法 This paper calcu- lation method			
					填方量 Fill volume	挖方量 Excavation volume	填方量 Fill volume	挖方量 Excavation volume	填方量 Fill volume	挖方量 Excavation volume	填方量 Fill volume	挖方量 Excavation volume		
0+ 00	3.00	0.00	0.00	15.00										
0+ 050	1.69	0.00	0.607	6.25										
0+ 100	0.75	0.00	14.63	2.06										
0+ 150	0.19	0.00	21.45	0.11										
0+ 200	0.00	0.00	24.00	0.00	5.440 00	1.520 00	5.415 00	1.622 00	5.451 60	1.526 00	5.442 50	1.524 10		
0+ 250	0.19	0.00	21.45	0.41										
0+ 300	0.75	0.00	14.63	2.06										
0+ 350	1.69	0.00	0.607	6.25										
0+ 400	3.00	0.00	0.00	15.00										
相对误差/% Relation error							0.49	6.7	0.2	0.4	0.05	0.27		

5 结 论

1) 平均断面法的误差不容忽视, 其假定渠道挖填断面面积函数为分段线形函数, 是造成误差的根本原因, 数值解法虽然精度较高, 但拟和函数的寻求相当复杂, 给计算带来了不少麻烦。

2) 本研究基于 MATLAB 强大的数学计算功能与友好的界面, 以较少的编码和较简单的语言实现了插值函数的寻求和数值积分的复杂运算, 并在此基础上提出了土方计算的简化算法, 算例结果表明该方法具有计算精度高、操作简单等特点, 优于现有的土方量计算方法。

[参考文献]

- [1] 罗阳军,张宽地,王 铭,等.数值方法在渠道土方计算中的运用[J].灌溉排水,2003,22(增):94-96
- [2] 王 铭,宋天峰,罗阳军.平均断面法计算渠道土方量的本质缺陷及改进[J].西北农林科技大学学报:自然科学版,2004,32(9):118-122
- [3] 刘崇选,高双强.渠槽、路基等土方量计算[J].陕西水利发电,2001,17(3):61-64
- [4] 蒋允静.画法几何与工程制图[M].西安:陕西科技出版社,2003
- [5] 陈文略,王子羊.三次样条曲线拟和的算法及实现[J].计算机应用研究,1996,16(6):41-42
- [6] 邓建中.计算方法[M].西安:西安交通大学出版社,1985
- [7] 杨晓东.数值法在江堤土方量计算中的应用[J].水利天地,2002(8):42
- [8] 王沫然.MATLAB与科学计算[M].第2版.北京:电力工业出版社,2003
- [9] 刘炳文,许曼舒.Visual Basic 程序设计教程[M].北京:清华大学出版社,2000

Earthwork calculation of channel based on MATLAB

ZHANG Kuan-di¹, LU Hong-xing¹, MA Xim ing¹, CUI Ning-bo^{1,2}*(1 College of Water Conservancy and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;**2 Key Laboratory of Agricultural Soil and Water Engineering in Arid and Semiarid Areas, Ministry of Education,**Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)*

Abstract: In view of the deficiency of traditional earthwork calculation of channel, a new method, which applies cubic splines interpolation to fit the section area function of fill excavation in channel, and the uses of Romberg integration formula to calculate earthwork volume of channel was proposed based on the characteristic of the MATLAB of formidable mathematical computation and simple language. At the same, the result of calculation indicated that this method is simple, precise and feasible for designers to refer.

Key words: calculation of earthwork in channel; cubic splines interpolation; Romberg integration; MATLAB programming and application