

层次分析法(AHP)的标度分析及其在水利工程评价中的应用

张文鸽^{1,2}, 黄强¹

(1 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048; 2 黄河水利科学研究院, 河南 郑州 450003)

[摘要] 应用实例说明了1~9标度在应用时可能导致的一致性与思维一致性相脱节问题,并进一步分析了出现这种问题的原因。在此基础上,对层次分析法应用时所出现的标度进行了归纳和分析,并把评价准则的指标分为定性指标和定量指标两种情况进行讨论,提供了两种情况下构造判断矩阵的方法。对于定性指标,给出了构造两两比较判断矩阵时选用标度的建议;对于定量指标,构造了标度函数,并建立了定量准则下满足一致性要求的两两比较判断矩阵。

[关键词] 层次分析法;标度分析;水利工程评价;判断矩阵;标度函数

[中图分类号] O223

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2006)03-0152-05

在社会的各个领域,存在着大量的评价及决策问题,由于多种因素相互关联、相互制约及难以定量等特点而限制了一般数学方法的应用。美国著名运筹学家 Saaty 在 20 世纪 70 年代初提出了一种能有效处理这一问题的方法,称为层次分析法(AHP)^[1]。AHP 是一种定性与定量相结合的对多目标多准则系统进行分析与评价的方法,它采用数字标度(两两要素间相对重要性(哪个重要,重要多少)的数量尺度)的形式,将人的主观判断用数量形式表达和处理。由于数量化的结果是决策的基础和依据,所以 AHP 方法的应用关键在于标度的合理选择。由于 1~9 标度存在诸多缺陷^[2],所以自 Saaty 最早提出 1~9 标度以来,关于标度的定义研究较多,如 0~2 三标度法^[3],-1~1 三标度法^[4],-2~2 五标度制^[5],0.1~0.9 标度^[6],9/9~9/1 标度和 10/10~18/2 标度^[7]及指数标度^[8]等。这些标度的提出都有一定的背景和理由,但不同的标度法会产生不同的方案排序,直接或间接影响人们的决策。所以,本研究对应用层次分析法时所出现的标度进行了归纳和分析,并把评价准则的指标分为定性指标和定量指标两种情况进行讨论,提供了两种情况下构造判断矩阵的方法,以为多目标系统的准确评价提供参考。

1 AHP 中传统 1~9 标度的不足

应用 AHP 进行评价时,其主要步骤有:①建立描述系统功能或特征的内部独立的递阶层次结构;②对同属一级的要素,以上一级为准则进行两两比较,建立判断矩阵,并进行一致性检验;③计算单一准则下元素的相对权重;④计算各要素对目标层的合成权重,并对各方案进行排序,为决策提供依据。

但目前采用较广泛的 1~9 标度,可能导致判断矩阵一致性与思维一致性相脱节,如以下两个例子。

例 1:就相对评价准则 A 而言,设 B_1 比 B_2 稍微重要, B_2 比 B_3 稍微重要。如果说 B_1 比 B_3 极端重要,这样的评价结论在逻辑上不是很合理,由此建立的两两比较判断矩阵的一致性较差。为说明问题,依 1~9 标度可得判断矩阵(表 1)。

表 1 相对 A 准则的两两比较判断矩阵

Table 1 Judgment Matrix between three objects under the criterion of A

A	B_1	B_2	B_3
B_1	1	3	9
B_2	1/3	1	3
B_3	1/9	1/3	1

根据一致性检验方法^[1],经计算,该矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max}=3$,一致性指标 $C.I.=0$,故该判断矩阵

[收稿日期] 2005-07-11

[基金项目] 国家自然科学基金项目(E090350239090);河南省自然科学基金项目(0511053300)

[作者简介] 张文鸽(1975—),女,河南巩义人,工程师,在职博士,主要从事水文学与水资源研究。E-mail:zhangwenge75@sina.com

的一致性比例 $C.R. = C.I. / R.I. = 0$,说明由两两比较而建立的判断矩阵的一致性相当好。

例2:就相对评价准则 C 而言,设 D_1 比 D_2 强烈重要, D_2 比 D_3 明显重要。如果说 D_1 比 D_3 绝对重要,这样的评判结果在逻辑上是合理的,不存在自相矛盾之处。但依 1~9 标度可得判断矩阵(表 2)。

表 2 相对 C 准则的两两比较判断矩阵

Table 2 Judgment Matrix between three objects under the criterion of C

C	D_1	D_2	D_3
D_1	1	7	9
D_2	1/7	1	5
D_3	1/9	1/5	1

经计算,该矩阵的最大特征根 $\lambda_{max} = 3.028$,一致性指标 $C.I. = 0.104$,故该判断矩阵的一致性比例 $C.R. = C.I. / R.I. = 0.104 / 0.52 = 0.2 > 0.1$,说明此判断矩阵不具有满意的一致性。

在以上两个例子中之所以出现不合理性,原因在于定量的相对重要度不能正确反映定性评判的结果。例如,若 A 比 B 稍微重要一些,用数量表示 A 与 B 的权重比如果是 $0.6 : 0.4$ (与“略微”对应,心理测验所得权重比为 $0.55 : 0.45$)是可以接受的,但如果 A 与 B 的权重比达到 $0.75 : 0.25$,即权重比为 $3 : 1$ (或者说,前者的重要程度是后者的 3 倍),这与评判者的“稍优”的实际想法不尽相符。因此,Saaty 提出的 1~9 评判标度系统与人们头脑中的思维标度系统并非一致,并且这种非一致性有可

能破坏最后的方案排序优选。

2 标度分析

一般地,作为评价准则的指标可以分为两类,一类是定性指标(不能用统计数据量表示其指标值大小的指标),如商品外观的“美观性”指标,就无法用确切的统计数据量表示;另一类是定量指标(可以测定或者可用统计量表示其大小的指标),如反映生产能力的“固定资产总额”,就可以用数值量来反映其大小程度。

2.1 定性指标标度分析

当评价准则的指标是定性指标时,由于 Saaty 最早提出的 1~9 标度在定量人们的判断时不甚准确,所以标度问题一直是有关学者研究的焦点之一。根据国内学者提出的标度^[3-8]及所得判断矩阵的性质差异,可将标度归纳为两大类:Ⅰ.“互反性”标度;Ⅱ.“互补性”标度。属于Ⅰ类的标度有:1~9 标度、9/9~9/1 标度、10/10~18/2 标度和指数标度等;属于Ⅱ类的标度有:0.1~0.9 标度、0~1 标度、0~2 标度、-1~1 标度、-2~2 标度。第Ⅱ类标度的优点是易于为决策者或决策分析者所掌握,而且判断矩阵权向量的计算较为简便,但其存在明显的不足之处,即不能十分精确地反映实际情况。这是因为标度值较少,相对而言,对事物的“度量”就会变得粗糙。因此,对第Ⅱ类标度本文不作讨论。表 3 列出了几种常用的“互反性”标度。

表 3 几种常用“互反性”标度的描述

Table 3 Description of several reverse-used scales

标度 Scale	同样重要 Samely important	微小重要 Tinely important	稍微重要 Little important	更为重要 More important	明显重要 Evidently important	十分重要 Fully important	强烈重要 Intensively important	更强烈重要 More intensively important	极端重要 Extremely important
1~9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/9~9/1	9/9 (1)	9/8 (1.125)	9/7 (1.286)	9/6 (1.500)	9/5 (1.800)	9/4 (2.250)	9/3 (3.000)	9/2 (4.500)	9/1 (9)
10/10~18/2	10/10 (1)	11/9 (1.222)	12/8 (1.500)	13/7 (1.857)	14/6 (2.333)	15/5 (3.000)	16/4 (4.000)	17/3 (5.667)	18/2 (9)
9 ^{0/9} ~9 ^{8/9}	9 ^{0/9} (1)	9 ^{1/9} (1.277)	9 ^{2/9} (1.629)	9 ^{3/9} (2.080)	9 ^{4/9} (2.655)	9 ^{5/9} (3.389)	9 ^{6/9} (4.327)	9 ^{7/9} (5.523)	9 ^{8/9} (7.225)
2 ^{0/2} ~2 ^{8/2}	2 ^{0/2} (1)	2 ^{1/2} (1.414)	2 ^{2/2} (2.000)	2 ^{3/2} (2.828)	2 ^{4/2} (4.000)	2 ^{5/2} (5.657)	2 ^{6/2} (8)	2 ^{7/2} (11.314)	2 ^{8/2} (16)
e ^{0/1} ~e ^{8/1}	e ^{0/1} (1)	e ^{1/1} (1.284)	e ^{2/1} (1.649)	e ^{3/1} (2.117)	e ^{4/1} (2.718)	e ^{5/1} (3.490)	e ^{6/1} (4.482)	e ^{7/1} (5.755)	e ^{8/1} (7.390)
e ^{0/5} ~e ^{8/5}	e ^{0/5} (1)	e ^{1/5} (1.221)	e ^{2/5} (1.492)	e ^{3/5} (1.822)	e ^{4/5} (2.226)	e ^{5/5} (2.718)	e ^{6/5} (3.320)	e ^{7/5} (4.055)	e ^{8/5} (4.953)

关于“互反性”标度的比较选择问题,已有不少学者进行了研究。如侯岳衡等^[9]、何堃^[10]、张崎等^[11]、徐泽水^[12]分别对常见的 4 种标度(1~9 标度、9/9~9/1 标度、10/10~18/2 标度和 9^{0/9}~9^{8/9}标

度),骆正清等^[13]对表 3 的所有标度进行了比较,但他们所采用的比较方法略有不同。侯岳衡等^[9]首先采用逻辑推理的方法,说明 1~9 标度中各等级之间关系的欠合理性,然后以 4 种标度下各等级的相对

权重与该等级标度值的相对偏差(权重偏差)、权重最大偏差和一致性指标作为评价标准,得出的结论是:(1)1~9 标度不宜用于需要精确的权重计算,但可用于各对比因素的排序计算;(2)指数标度、9/9~9/1 标度和 10/10~18/2 标度均可用于权值的计算,但指数标度最好;(3)9/9~9/1 标度大等级差时的权重差较大;(4)用 AHP 方法分析问题建议采用指数标度。徐泽水^[12]通过对 4 条标度曲线和有关评价指标(一致性指标、最大偏差值和均方差指标)的分析,认为 10/10~18/2 标度的性能最好,最适宜于精确的权值计算,且能得到较为合理的结果。何堃^[10]及张琦等^[11]也分析了 1~9 标度逻辑关系存在的不合理性,并分别用标度曲线加以说明,然后又分别提出了用群体判断矩阵方法和对判断矩阵的改进方法克服 1~9 标度的不足。骆正清等^[13]剖析了上述 4 个学者对同一问题得出不同结论的原因,进而采用保序性、一致性、标度均匀性、标度可记忆性、标度可感知性和标度权重拟合性等标准,对表 3 的几种常用标度进行了比较,指出:(1)对单一准则下的排序,各种标度法都具有保序性,因而建议使用 1~9 标度;(2)对精度要求较高的多准则下的排序问题,建议使用指数标度 $e^{1/4} \sim e^{8/4}$ 标度或 $e^{0.5} \sim e^{8.5}$ 标度。

综上所述认为,骆正清等^[13]提出的评价标准较为客观、全面,克服了目前较为普遍存在的仅以“一致性”作为标度优劣惟一评判标准时可能产生的弊端;给出的在不同情况下选择何种标度的建议,在一定程度上可以消除标度选择上的盲目性。因此,本文建议在应用 AHP 方法时采用骆正清等^[13]的结论。

2.2 定量指标标度分析

评价准则的指标为定量指标,当被评价对象之间比较重要性时,由于被评价对象的指标值是确定的量,所以在应用 AHP 方法时,有一个如何将定量指标进行标度的问题。对于此问题,可通过“标度函数”来解决^[14]。设层次分析模型中某一层次有 X_1, X_2, \dots, X_n 个元素,其评价准则为定量准则 P ,各元素相对于准则 P 的指标值分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 。对定量准则 P ,有 1 个标度函数 $f_P(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$,且满足如下条件。

(1)非负性: $f_P(x_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$;

(2)单调性: $\forall i, j$, 当 $x_i > x_j$ 时, $f_P(x_i) > f_P(x_j)$;

(3)可比性: 令 $x_1 = \max\{x_i\}, x_2 = \min\{x_i\} (i=$

$1, 2, \dots, n)$, 当选取准则为指标值越大越好时,若评价人认定 X_{\max} 比 X_{\min} 重要 r 倍,则有 $\frac{f_P(x_{\max})}{f_P(x_{\min})} = r$; 当选取准则为指标值越小越好时,若评价人认定 X_{\min} 比 X_{\max} 重要 r 倍,则有 $\frac{f_P(x_{\min})}{f_P(x_{\max})} = r$ 。

据此建立 P 准则下 X_1, X_2, \dots, X_n 的两两比较矩阵如表 4 所示。

表 4 相对 P 准则的两两比较判断矩阵

P	X_1	X_2	\dots	X_n
X_1	ρ_{11}	ρ_{12}	\dots	ρ_{1n}
X_2	ρ_{21}	ρ_{22}	\dots	ρ_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_n	ρ_{n1}	ρ_{n2}	\dots	ρ_{nn}

其中, $\rho_{ij} = \frac{f_P(x_i)}{f_P(x_j)} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 。

结论:上述所建立的判断矩阵 P 为完全一致性矩阵。

证明:非负性: $\rho_{ij} = \frac{f_P(x_i)}{f_P(x_j)} > 0$;

互反性: $\rho_{ij} = \frac{f_P(x_i)}{f_P(x_j)} = \frac{1}{f_P(x_j)/f_P(x_i)} = \frac{1}{\rho_{ji}}$;

传递性: $\forall i, j, k, \rho_{ij} = \frac{f_P(x_i)}{f_P(x_j)} = \frac{f_P(x_i)/f_P(x_k)}{f_P(x_j)/f_P(x_k)} = \rho_{ik}/\rho_{jk}$ 。

综上所述,上述所建立的判断矩阵 P 满足非负性、互反性和传递性,为完全一致性矩阵。

2.2.1 标度函数的构造 当选取准则为指标值越大越好时,构造标度函数 $f_P(x) = \exp(c(x - x_{\min})) (P=1, 2, \dots, n)$; 当选取准则为指标值越小越好时,构造标度函数 $f_P(x) = \exp(c(x_{\max} - x)) (P=1, 2, \dots, n)$, 其中, $c = \frac{\ln r}{x_{\max} - x_{\min}}$ 。 $f_P(x)$ 满足非负性、单调性、可比性。

证明:非负性、单调性显然满足。

可比性:记 $x_{\max} = \max\{x_i\}, x_{\min} = \min\{x_i\} (i=1, 2, \dots, n)$, 当选取准则为指标值越大越好时,则有

$$\frac{f_P(x_{\max})}{f_P(x_{\min})} = \frac{\exp(\frac{\ln r}{(x_{\max} - x_{\min})}(x_{\max} - x_{\min}))}{\exp(\frac{\ln r}{(x_{\max} - x_{\min})}(x_{\min} - x_{\min}))} = \exp(\ln r) = r;$$

当选取准则为指标值越小越好时,则有

$$\frac{f_P(x_{\min})}{f_P(x_{\max})} = \frac{\exp(\frac{\ln r}{(x_{\max} - x_{\min})}(x_{\max} - x_{\min}))}{\exp(\frac{\ln r}{(x_{\max} - x_{\min})}(x_{\max} - x_{\max}))} = \exp(\ln r) = r;$$

$\exp(\ln r) = r$ 。

标度函数 $f_p(x_i)$ 满足非负性、单调性和可比性,由上述结论可知,由其构建的判断矩阵 P (其中 $p_{ij} = \frac{f_p(x_i)}{f_p(x_j)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)) 为完全一致性矩阵。因此,有了定量指标的标度函数,可用 AHP 实现定量指标之间重要性的比较。

2.2.2 例证分析 例 3: 设某水利工程施工中要选用一种材料,要求在体积相同时质量越轻越好,但同时要考虑强度。现有 3 种材料 X_1, X_2, X_3 可供选择,其单位体积质量分别为 3, 5, 8 kg/m³, 强度为 10, 15, 25 kPa。请优选。

解:

(1) 建立递阶层次结构如图 1 所示。

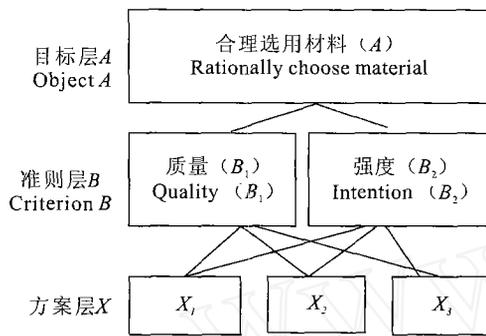


图 1 递阶层次结构图

Fig. 1 Hierarchy graph

(2) 以质量作为评价准则。假定评价人认定“单位体积质量为 3 的材料”与“单位体积质量为 8 的材料”相比而言为“强烈重要”,则 $r = 7$ (采用 1~9 标度),其标度函数为

$$f_1(x) = \exp\left(\frac{\ln r}{(8-3)}(8-x)\right) = \exp\left(\frac{\ln r}{5}(8-x)\right),$$

建立重量准则下的两两比较矩阵如表 5 所示。

表 5 相对质量准则的两两比较判断矩阵

Table 5 Judgment matrix under the criterion of quality

B_1	X_1	X_2	X_3	权重(W_1) Weight
X_1	1	2.18	7	0.624
X_2	0.46	1	3.22	0.287
X_3	1/7	0.31	1	0.089

经计算,此判断矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max} = 3.0$, 从而一致性比例 $C.R. = 0$,故此两两比较判断矩阵的一致性非常好,在质量准则下比较时材料 X_1, X_2, X_3 均可以采用。

(3) 以强度作为评价准则。假定评价人认定“强度为 25 的材料”与“强度为 10 的材料”相比而言为“十分重要”,则 $r = 6$ (采用 1~9 标度),标度函数 $f_2(x) = \exp\left(\frac{\ln r}{(25-10)}(x-10)\right) = \exp\left(\frac{\ln r}{15}(x-10)\right)$ 。强度准则下的两两比较判断矩阵如表 6 所示。

表 6 相对强度准则的两两比较判断矩阵

Table 6 Judgment matrix under the criterion of intention

B_2	X_1	X_2	X_3	权重(W_2) Weight
X_1	1	0.55	1/6	0.113
X_2	1.82	1	0.30	0.205
X_3	6	3.33	1	0.682

经计算,此判断矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max} = 3.0$, 从而一致性比例 $C.R. = 0$,故此两两比较判断矩阵一致性非常好,材料 X_1, X_2, X_3 在强度准则下比较时均可以采用。

(4) 以相对目标层作为评价准则。建立目标层“合理选用材料”准则下重量和强度两个指标的判断矩阵,由于重量和强度指标为定性指标,因此采用本文建议的 $c^{0.74} \sim c^{8.74}$ 标度构造判断矩阵。假定评价人认定强度指标比重量指标“更为重要”,则目标层准则下强度指标和重量指标的两两比较判断矩阵如表 7 所示。

表 7 相对目标层准则的两两比较判断矩阵

Table 7 Judgment matrix under the criterion of object

A	B_1	B_2	权重(W_0) Weight
B_1	1	2.117	0.679
B_2	0.472	1	0.321

综上所述,材料 X_1, X_2, X_3 对目标层的合成权重为 0.460, 0.261, 0.279, 材料的优劣排序为 X_1, X_3, X_2 , 因此在该水利工程施工中应选材料 X_1 。

3 结 语

近年来,由美国著名运筹学家 Saaty 所提出的一种实用的决策方法——层次分析法,在我国得到了广泛应用。但在实际应用中,该方法广泛采用的 1~9 标度可能导致一致性检验与实际不符问题,本文说明了这种偏差出现的原因。在此基础上,将评价准则的指标分为定性指标和定量指标两种不同的情况加以讨论,提供了两类情况下构造判断矩阵的方法。对于定性指标,本文建议采用骆正清等^[13]推荐的标度进行两两比较判断矩阵的构造,其给出的在不同情况下选择何种标度的建议,在一定程度上可以消除人们在标度选择上的盲目性;对于定量指标,

可以采用本文所提出的标度函数,构造不同准则下满足一致性要求的两两比较判断矩阵,从而得到较为合理的决策结果。但在实际应用中,纯粹的定量指标和定性指标并不多见,大多数情况下,同一个问题

中既有定量指标又有定性指标,这时可将处理定量指标和定性指标的方法结合使用。只有这样,才能保证 AHP 综合评价结果的有效性和合理性。

[参考文献]

- [1] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. [S. L.]; McGraw Hill Inc, 1980.
- [2] 吕跃进,张 维. 指数标度在 AHP 标度系统中的重要作用[J]. 系统工程学报, 2003, 18(5): 452-456.
- [3] 左 军. 层次分析法中判断矩阵的间接给出法[J]. 系统工程, 1988, 10(6): 56-63.
- [4] 徐泽水. 层次分析法中构造判断矩阵的新方法[J]. 系统工程, 1997, 19(增刊): 204-206.
- [5] 徐泽水. 层次分析新标度法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(10): 74-77.
- [6] 杜 栋. 基于 0.1~0.9 标度的 AHP 再研究[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 23(5): 36-38.
- [7] 汪 浩,马 达. 层次分析法标度评价与新标度方法[J]. 系统工程理论与实践, 1993, 13(5): 24-26.
- [8] 舒 康,梁镇伟. AHP 中的指数标度[J]. 系统工程理论与实践, 1990, 10(1): 6-8.
- [9] 侯岳衡,沈德家. 指数标度及其与几种标度的比较[J]. 系统工程理论与实践, 1995, 15(10): 43-46.
- [10] 何 堃. 层次分析法的标度问题[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 58-61.
- [11] 张 崎,西村昂. 提高层次分析法评精度的几种方法[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11): 29-35.
- [12] 徐泽水. 关于层次分析法中几种标度的模拟评估[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(7): 58-62.
- [13] 骆正清,杨善林. 层次分析法中几种标度的比较[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(9): 51-60.
- [14] 张晨光,吴泽宁. 层次分析法(AHP)比例标度的分析与改进[J]. 郑州工业大学学报, 2000, 21(2): 85-87.

Scale analysis of AHP and its application in evaluating water conservancy engineering

ZHANG Wen-ge^{1,2}, HUANG Qiang¹

(1 School of Water and Power of Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;

2 Yellow River Hydraulic Research Institute, Zhengzhou, Henan 450003, China)

Abstract: The 1—9 scale will lead consistency check to deviation from the fact in two cases by applying AHP, and then the reasons are explained. On the basis of it, the scales are summarized and analyzed. The methods to establish judgment matrix are put forward according to the difference of evaluation criterion. When the index is qualitative, the suggestion to choose the scale when establishing judgment matrix is given; When the index is quantitative, the judgment matrix that answers the consistency demand can be erected by constructing a scale function.

Key words: AHP; scale analysis; water conservancy engineering evaluation; judgment matrix; index function