考虑弹塑性耦合的单轴压缩岩样梯度塑性分析*

赵 冰[1,2], 李 宁[1,3], 盛国刚[2]

(1 西安理工大学 岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2 长沙理工大学 桥梁与结构工程学院, 湖南 长沙 410076;
3 中国科学院 寒区与旱区环境与工程研究所, 甘肃 兰州 730000)

[摘 要] 在梯度塑性模型的基础上, 假定弹性模量是塑性应变的函数, 考虑应变局部化带带内和带外弹性模量的不同变化, 对单轴压缩岩样作了考虑弹塑性耦合的梯度塑性分析。该模型同时反映了岩样的弹塑性耦合现象和应变局部化现象。由算例及其分析可知, 应变局部化带的宽度与弹塑性耦合无关; 弹塑性耦合是峰后曲线下凹部分产生的原因之一; 弹塑性耦合对Ⅱ类变形行为的发生有某些抑制作用; 仅考虑应变局部化带内的弹性模量与塑性应变耦合时, 峰后变形曲线的下凹弯曲更为显著。

[关键词] 梯度塑性; 弹塑性耦合; 岩样; 峰后曲线; 应变局部化

[中图分类号] TU 313.2 [文献标识码] A [文章编号] 1671-9387(2005)09-0137-04

在岩样的单轴压缩破坏过程中, 有两个值得关注的现象: (1) 在超过屈服点后, 岩石的表观弹性模量随试件峰值后区的变形和渐进破坏而减小, 这通常被称为弹塑性耦合现象[1,2]; (2) 在试件峰值后区, 原来的均匀变形模式被局限在狭窄带状区域内的急剧不连续的位移梯度所代替, 这种现象被称为应变局部化现象。为了合理地解释上述两种现象, 采用弹塑性耦合的岩土塑性理论[1,3]和梯度塑性理论[4~6], 分别对弹塑性耦合现象和应变局部化现象作了较为合理的分析。岩土塑性理论通常认为, 弹性系数将随塑性变形的发展而减小, 反映了表观弹性模量随变形发展而变化的过程; 梯度塑性理论在屈服函数中引入了应变的梯度项, 描述了介质的应变局部化特征和软化现象, 反映了介质的尺寸效应, 避免了数值计算时出现的网格敏感性。但本研究认为, 上述两种理论之间似乎仍然存在着以下疑问: (1) 既然存在应变局部化带, 那么, 带内和带外的弹性模量就显然不应是同步变化的, 而通常的岩土塑性理论处理方法中, 不分带内和带外, 弹性系数都随塑性变形的发展而减小, 这显然有悖于常理。(2) 既然弹性系数将随塑性变形的发展而减小, 弹性系数的这种变化就必然会对峰值后区的变形曲线产生影响[5,7], 那么, 这种影响是什么。(3) 应变局部化带的宽度同弹塑性耦合是否有关。

本研究在梯度塑性模型的基础上(即在屈服函数中引入了应变的梯度项, 以反映岩土介质应变局部化特征和软化现象), 假定应变局部化带内的弹性模量是塑性应变的函数, 局部化带外弹性模量可以忽略, 以此来探讨上述的几个相关问题。

1 基本假设

本研究将不可恢复应变概化为塑性应变。为了反映弹性系数随塑性变形的发展而减小这种特性, 设应变局部化带内的弹性模量是塑性应变的函数, 即:

$$E = E_0 f(\varepsilon^p) \tag{1}$$

式中, E 为弹性模量; E_0 为材料的初始弹性模量; ε^p 为塑性应变。发生塑性变形前, $\varepsilon^p = 0$ 时, 此时材料的弹性模量为初始弹性模量, $f(\varepsilon^p) = 1$; 随着 ε^p 的增大, 材料的弹性模量趋近于某个固定值, $f(\varepsilon^p)$ 也趋近于某个固定值。因此, $f(\varepsilon^p)$ 应该是一个下凹的非线性函数。借鉴张承柱等[3]提出的弹塑性耦合本构模型, 假设:

$$E = E_0 \exp(\beta\varepsilon^p) \tag{2}$$

式中, β 为弹塑性耦合系数, 为负数, 用以反映材料损伤的积累。

2 单轴压缩条件下的岩样变形分析

如图 1 所示, 高度为 L 的岩石试件, 宏观上是均质的, 受到均匀的轴向应力 σ 作用。在进行塑性变

* [收稿日期] 2005-03-21
[基金项目] 湖南省自然科学基金项目(04JJ40032); 湖南省教育厅科研项目(04C119)
[作者简介] 赵 冰(1972-), 男, 湖南涟源人, 副教授, 在职博士, 主要从事岩土力学与工程研究。

形分析时,可将其简化为一维问题,取图1所示坐标系,坐标原点处于试件中心。假设介质为弹塑性硬化-软化模型。在弹性阶段,岩石的本构关系为初始弹性模量E_0控制的应力应变关系,其关系式如下式所示:

$$\sigma = E_0\epsilon \tag{3}$$

式中,ϵ为轴向应变。

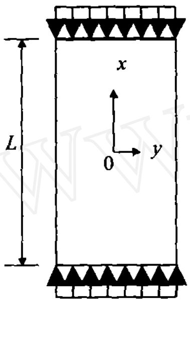

图1　单轴压缩岩样

Fig. 1　Rock specimen in axial compression

当材料达到最大抗压强度σ_c后,介质进入塑性软化阶段,软化模量为负常数h;同时,由于塑性变形的发展,塑性区的弹性模量也将以式(2)的形式发生改变。

在一维情况下,塑性软化阶段的本构方程可以用梯度塑性理论归结为一个微分方程[4,5],即

$$\bar{\sigma} = \sigma_t + h\epsilon^p - c\frac{d^2\epsilon^p}{dx^2} \tag{4}$$

式中,$\bar{\sigma}$为当前屈服应力;σ_t为初始屈服应力;$h=\frac{d\sigma}{d\epsilon^p}$,为软化模量;$c$为常数,$-c\frac{d^2\epsilon^p}{dx^2}$可以理解为应变梯度修正项。由于应变梯度修正项的引入,式(4)成为一个关于塑性应变ϵ^p的二阶微分方程。

式(4)的通解为:

$$\epsilon^p = A\cos(x/l) + h^{-1}(\bar{\sigma} - \sigma_t) \tag{5}$$

式中,A为积分常数;l为材料内部特征长度,且

$$l = \sqrt{-\frac{c}{h}} \tag{6}$$

此时,l具有长度的量纲。因此,本连续介质模型提供了一个材料内部特征长度参数。

将式(5)对时间微分,可得塑性应变率$\dot{\epsilon}^p$的计算公式:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{A}\cos(x/l) + h^{-1}\dot{\sigma} \tag{7}$$

式中,$\dot{A}$为式(5)中积分常数A的时间微分;$\dot{\sigma}$为应力变化率。

假设塑性区的宽度为w,在弹塑性边界上,边界条件为:

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \tag{8}$$

在$x=w/2$处,应用式(8)的边界条件,可得:

$$\dot{A} = -h^{-1}\dot{\sigma}/\cos(w/(2l))$$

即

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{h}\left[1 - \frac{\cos(x/l)}{\cos(w/(2l))}\right] \tag{9}$$

试样总应变率$\dot{\epsilon}$由塑性应变率与弹性应变率组成,再考虑塑性区发生的弹塑性耦合,将式(2)代入式(9),则试样总应变率$\dot{\epsilon}$的计算公式为:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{h}\left[1 - \frac{\cos(x/l)}{\cos(w/(2l))}\right] + \frac{\dot{\sigma}}{E_0\exp(\beta\epsilon^p)} \tag{10}$$

以上式积分后,得到弹塑性边界的速度为:

$$\dot{u}(w/2) = \frac{\dot{\sigma}w}{2E_0\exp(\beta\epsilon^p)} + \frac{\dot{\sigma}}{h}\int^{w/2}\left[1 - \frac{\cos(x/l)}{\cos(w/(2l))}\right]dx \tag{11}$$

式(11)加上杆弹性部分(从$x=w/2$到$x=L/2$)的速度,可得到杆右端的速度$\dot{u}(L/2)$,弹性区的弹性应变率受虎克定律$\dot{\epsilon}=\dot{\sigma}/E_0$控制,即

$$\frac{\dot{u}(L/2)}{\dot{\sigma}} = \frac{w}{2E_0\exp(\beta\epsilon^p)} + \frac{L-w}{2E_0} + \frac{1}{h}\left[w/2 - l\tan(w/(2l))\right] \tag{12}$$

显然,式(12)是一个关于长度的周期解。岩石试件实际能存在的局部化软化塑性区宽度,应在位移速率绝对值取最大值时得到,由此可知:

$$\frac{d(\dot{u}(L/2)/\dot{\sigma})}{d(w/2)} = 0 \tag{13}$$

对式(13)求解,可得到局部化塑性区宽度。可以发现,在本研究假设条件下,由于塑性应变ϵ^p仅受$h=\frac{d\sigma}{d\epsilon^p}$控制,即式(12)等号右边第1项的耦合项与应变局部化区域宽度w无关。对式(12)强加式(13)的要求,可得到:

$$\cos^2(w/(2l)) = 1 \tag{14}$$

式(14)最小的有意义解是圆周率π,于是有:

$$w = 2\pi\sqrt{-\frac{c}{h}} \tag{15}$$

故此就建立了局部化区域宽度w和模型参数h与c之间的关系[4]。将式(15)代入式(12),可得到杆右端速度$\dot{u}(L/2)$与应力率$\dot{\sigma}$之间的关系表达式,即

$$\frac{\dot{u}(L/2)}{\dot{\sigma}} = \frac{w}{2E_0\exp(\beta\epsilon^p)} + \frac{L-w}{2E_0} + \frac{w}{2h} \tag{16}$$

杆两端的速度差$\Delta\dot{u} = \dot{u}(L/2) - \dot{u}(-L/2)$,与应力

率 $\mathring{\sigma}$ 之间的关系式为:

$$\frac{\Delta\mathring{u}}{\mathring{\sigma}} = \frac{w}{E_0\exp(\beta\epsilon^p)} + \frac{L-w}{E_0} + \frac{w}{h} \tag{17}$$

将 $\hat{\epsilon} = \frac{\Delta\mathring{u}}{L}$, $\hat{\sigma} = \mathring{\sigma}$ 分别记为岩样的表观应变率和表观应力率。同时将式(11)带入, 则式(17)可改写为:

$$d\hat{\epsilon} = \left[\frac{1}{E_0}\left[1 + \frac{w}{L}\left(\frac{1}{\exp(\beta\epsilon^p)} - 1\right)\right] + \frac{w}{hL}\right] d\hat{\sigma} \tag{18}$$

3　算例及其结果分析

假设岩样的初始弹模 $E_0 = 20$ GPa, 内部长度参数 $l = 5$ mm, 软化模量 $h = -4$ GPa, 弹塑性耦合系数 $\beta = -800$, 试样高度 $L = 100$ mm, 由(15)式得到的局部化软化区宽度 $w = 31.4$ mm。峰值抗压强度 $\sigma_c = 20$ MPa。

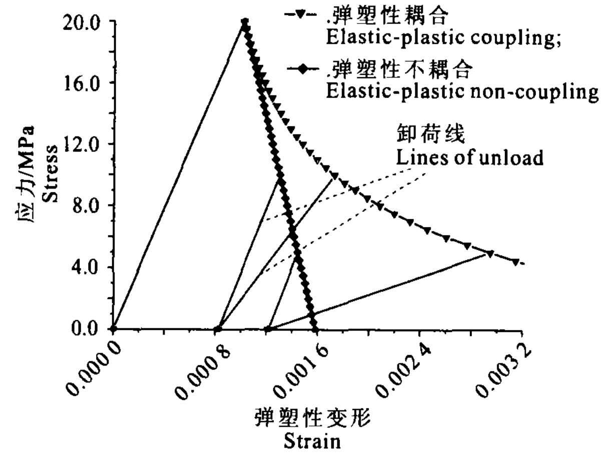

图 2　单轴压缩岩样在弹塑性耦合和弹塑性不耦合时的变形曲线

Fig. 2　Displacement curve of rock specimen in axial compression: elastic-plastic coupling and elastic-plastic non-coupling

根据(18)式编制程序, 得到应力应变曲线, 如图 2 所示。由于考虑了局部化带内的弹性模量随塑性变形的发展而减小, 模型反映了试验所观察到的弹塑性耦合现象。由图 2 可知, 考虑弹塑性耦合后, 岩石试件峰后曲线趋于平缓。可以认为, 弹塑性耦合是岩石试件峰后曲线下凹部分产生的原因之一。

另外, 如同文献[5]所言, 由于应变梯度修正项的引入, 可以在模型中反映尺寸效应, 甚至出现 Ⅱ 类变形行为。本研究复现了这一现象(图 3)。

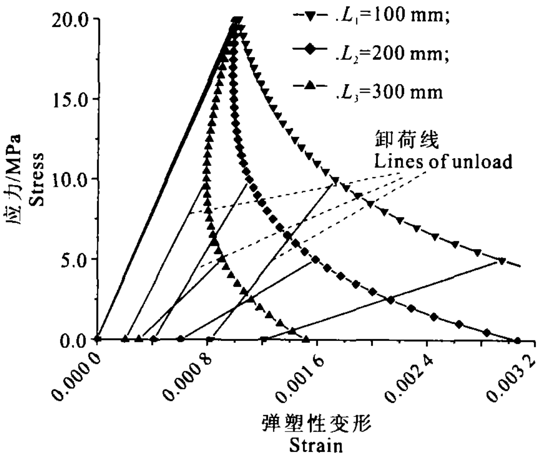

图 3　单轴压缩岩样的尺寸效应

Fig. 3　Size effect of rock specimen in axial compression

由图 3 可见, 随着试样高度的增高($L_1 < L_2 < L_3$), 峰后曲线也将变得更加陡峭, 材料表现得更脆。当 $\frac{\mathring{u}(L/2)}{\mathring{\sigma}} > 0$ 时, 对式(16)作变换, 本研究得到 Ⅱ 类变形行为发生的条件为:

$$L > w\left(1 + \frac{E_0}{-h} - \frac{1}{\exp(\beta\epsilon^p)}\right) \tag{19}$$

由此可见, Ⅱ 类变形行为的发生与弹塑性耦合有关, 且弹塑性耦合对 Ⅱ 类变形行为的发生起某些抑制作用。其次, 是否考虑模型中应变局部化带内弹性模量和带外弹性模量的不同变化, 所得岩石试件的峰后变形曲线也是不同的(图 4)。从逻辑上讲, 考虑应变局部化带内和带外弹性模量的不同变化似乎更合理。

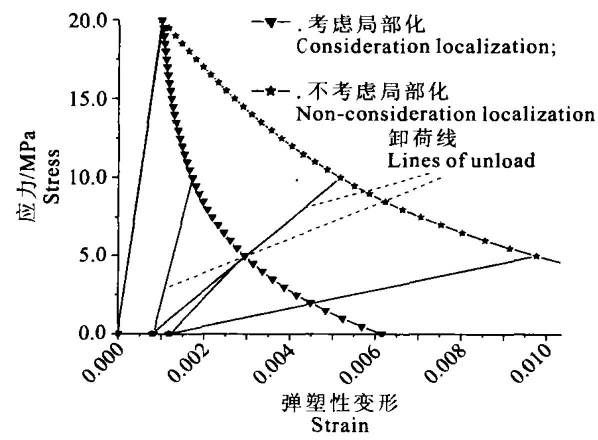

图 4　单轴压缩岩样的局部化效应

Fig. 4　Localization of rock specimen in axial compression

4 结 论

(1) 应变局部化带的宽度同弹塑性耦合无关;

(2) 由于考虑了应变局部化带内的弹性模量, 该弹性模量随塑性变形的发展而减小。故模型反映了试验所观察到的弹塑性耦合现象。

(3) 弹塑性耦合是峰后曲线下凹部分产生的原因之一。

(4) 由于应变梯度项的引入, 可以在模型中反映尺寸效应。本研究得到的Ⅱ类变形行为发生的条件为:

$$L > w\left(1 + \frac{E_0}{-h} - \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon^p)}\right)$$

可以看出, 弹塑性耦合对Ⅱ类变形行为的发生有某些抑制作用。

(5) 本研究发现, 仅考虑带内弹性模量与塑性应变耦合, 即只考虑应变局部化的影响时, 峰后变形曲线的下凹弯曲将更为显著。

(6) 本研究仅从塑性力学的角度对单轴压缩岩样进行了分析, 在以后进一步的研究中, 还有待从损伤和断裂的角度进行深入探索。

[参考文献]

[1] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003.

[2] 殷有泉, 曲圣年. 弹塑性耦合和广义正交流动法则[J]. 力学学报, 1982, 12(1): 63-70.

[3] 张承柱, 刘信生. 应变空间表述的混凝土弹塑性耦合本构模型[J]. 清华大学学报, 1996, 36(3): 59-64.

[4] De Borst R, M hlhaus H B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects[J]. Int J Solids Structures, 1992, 35: 521-539.

[5] 潘一山, 徐秉业, 王明洋. 岩石塑性应变梯度与Ⅱ类岩石变形行为研究[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 471-474.

[6] 赵 冰, 李 宁. 软化岩土介质的应变局部化研究进展——意义·现状·应变梯度[J]. 岩土力学, 2005, 23(3): 494-500.

[7] 鄢建华, 黄宝德, 汤 雷. 岩石类材料峰后本构关系研究进展[J]. 地质灾害与环境保护, 2003, 14(4): 58-62.

The gradient-dependent plastic analysis of rock specimen in uniaxial compression considering elastic-plastic coupling

ZHAO Bing[1,2], LI Ning[1,3], SHENG Guo-gang[2]

(1 Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;

2 Department of Bridge and structure Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha, Hunan 410076, China;

3 Cold and Arid Regions Environmental and Engineering Institute, CAS, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract: Many researchers pay great attention to strain localization theory, few of them considered the coupling behavior of the elastic and plastic deformation of rock within the localization band. Based on the gradient-dependent plasticity theory, the coupling behavior of the elastic and plastic deformation of rock is considered and a relatively elastic-plastic coupling model is proposed for a simple rock specimen in this paper. The analysis indicates that the width of shear band is independent of elastic-plastic coupling, and the example shows that the elastic-plastic coupling is one of the reasons resulting in the curve in post-peak area, and elastic-plastic coupling restrains class Ⅱ behavior of rock some sort.

Key words: gradient-dependent plasticity; elastic-plastic coupling; rock specimen; curve in post-peak area; strain localization