约束优化问题的遗传算法求解*

宋松柏, 蔡焕杰, 康 艳
(西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 应用遗传算法基本原理, 采用锦标赛选择、算术交叉、均匀交叉、均匀变异和非均匀变异算子, 设计了一般非线性规划和整数规划问题的通用求解算法, 应用Matlab 6.0编制了相应的求解软件。实例测试结果表明, 该算法可以应用于一般的非线性规划和整数规划问题。

[关键词] 非线性规划; 整数规划; 约束优化; 遗传算法

[中图分类号] O224 [文献标识码] A [文章编号] 1671-9387(2005)01-0150-05

目前, 应用遗传算法(Genetic Algorithm, GA)处理有约束优化问题尚无统一的方法。常用的处理约束方法有修复不可行解法、改变遗传算子法和惩罚函数法[1~6]。修复不可行解法的主要缺点是不同类的求解问题有不同的修复算法, 修复算法依赖于所求问题; 改变遗传算子法在求解复杂的非线性优化问题及设计相应的遗传算子时是非常困难的; 惩罚函数法针对不可行解的个体, 在计算个体适应度时, 施加某种惩罚, 降低该个体的适应度, 使其被遗传到下一代群体的机会减少, 经过若干次迭代计算, 种群最后逐渐收敛于可行解。

因此, 实际中应用GA求解约束优化问题时, 往往是根据具体优化模型中约束条件的特征, 选择适合的遗传算子或设计相应的遗传算子, 选用上述方法进行优化问题的求解。本研究基于Fernando Jiménez[7]的研究, 对一般非线性规划(Nonlinear Programming Problem, NPP)和整数规划(Integral Programming Problem, IPP)约束优化问题的GA求解进行探讨, 应用Matlab 6.0编制了相应的求解软件。以期为非线性规划和整数规划问题求解提供参考。

1 NPP和IPP问题求解的标准形式

NPP和IPP问题求解的标准形式可以表示为:

$$\begin{cases} \text{目标函数} & \mathrm{Min} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \\ \text{约束条件} & g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ & l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{1}$$

式中, m, n 分别为约束数和决策变量数; $x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n$ 为决策变量, 对于整数规划, 取值为介于$[l_j, u_j]$的整数值, 其中$[l_j, u_j]$为变量的取值范围; $g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$为不等式约束左边项, 左边项可以是线性, 也可以是非线性。

采用以下方法将一般模型转换为标准形式。

(1) 目标函数最大化

对于目标函数最大化问题, 可用其负值的最小化问题替代, 求解后, 将结果再反号, 则为原目标函数的最大化值。即 $\mathrm{Max} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -\{\mathrm{Min} f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)\}$。

(2) 约束为"≥ 0"的形式

若约束为$g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \ge 0$的形式, 两边同乘以$-1$, 则可转换为$-g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0$的形式。

(3) 约束为"$=0$"的形式

若约束为$g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = 0$的形式, 可用2个约束$\begin{cases} g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0 \\ g_i(x_1, \cdots, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \ge 0 \end{cases}$替代, 对于$g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \ge 0$, 可用方法(2)转换为$-g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0$, 因此, $g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = 0$最后被转换为$\begin{cases} g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0 \\ -g_i(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \le 0 \end{cases}$。

* [收稿日期] 2003-12-08
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(50179031); 高等学校全国优秀博士学位论文作者专项基金(200052); 西北农林科技大学2004年优秀科研人才专项基金(04ZR014)
[作者简介] 宋松柏(1965-), 男, 陕西永寿人, 副教授, 硕士, 主要从事水文水资源研究。E-mail: SSB6533@yahoo.com.cn

2　NPP 和 IPP 问题的 GA 求解

NPP 和 IPP 问题的 GA 算法步骤如下所述。

2.1　NPP 问题的 GA 算法

2.1.1　初始化群体　在满足式(1)约束条件的解空间, 选择一个初始解 $x^0 = (x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ 作为初始群体个体 Start-population (i), $i = 1, 2, \cdots$, Popsize。初始群体为演化计算, 可提供初始的"良种"。

2.1.2　评价群体适应度　将初始群体代入式(1)目标函数中, 计算相应的适应度 Start-population (i). Fitness, 按照可行性判别条件, 判别个体可行状态 Start-population (i). Feasible, $i = 1, 2, \cdots$, Popsize。以 Feasible = 1 表示个体为可行解, Peasible = 0 表示个体为不可行解。

2.1.3　置当前遗传代数　置 Current-gen = 1。

2.1.4　选择最优个体　由于式(1)为目标函数最小化问题, 因此, 在群体大小为 Popsize 的初始群体 Start-population (i), $i = 1, 2, \cdots$, Popsize, 选择适应度 Start-population (i). Fitness 最小, 且满足 Start-population (i). Feasible = 1 的个体作为最优个体 Best-individual, 并把该个体的适应度和解的可行状态赋给 Best-individual. Fitness 和 Best-individual. Feasible。

2.1.5　最优个体遗传到新一代群体　置当前个体序号 $s = 1$, 将最优个体 Best-individual 赋给新一代群体的第 1 个个体 New-population (1), 其中 $s = s + 1$。

2.1.6　选　择　采用锦标赛选择 (Tournament Selection), 首先在 [1, Popsize] 内随机产生 tourn 个个体序号 $\{k_1, k_2, \cdots k_{tourn}\}$, 按照最优保存策略 (Elitism Strategy) 选取个体 mate1 和 mate2。本文约定最优保存策略的原则为: ① 2 个可行解个体, 其评价适应度值小的个体优于评价适应度值大的个体; ② 不可行解个体在遗传过程中被淘汰。按照上述选择, 使群体在遗传过程中, 始终保持"良种"。因此, 对于 tourn 个可行解个体, 则适应度值最小的个体将被最后选择遗传到下一代群体。

2.1.7　交　叉　交叉算子采用算术交叉 (Arithmetic Crossover), 个体 mate1 和 mate2 算术交叉, 产生 2 个个体 child1 和 child2 为:

$$\begin{cases} \text{child1} = r \cdot \text{mate2} + (1 - r) \cdot \text{mate1} \\ \text{child2} = r \cdot \text{mate1} + (1 - r) \cdot \text{mate2} \end{cases} \tag{2}$$

式中, r 为界于 [0, 1] 的随机数。

2.1.8　变　异　变异采用非均匀变异 (Non uniform Mutation), 对于个体 child1 和 child2 分别进行非均匀变异, 则变异后分别产生 2 个个体 offspring1 和 offspring2。假定个体 child1 进行非均匀变异, 产生个体 offspring1。

设 child1 = $x_1 x_2, \cdots x_k, \cdots, x_n$, 非均匀变异后产生的个体为 offspring1 = $x_1 x_2, \cdots, x_k', \cdots, x_n$, 若变异点 x_k 处的基因值取值范围为 $[l_k, u_k]$, 则新的基因值 x_k' 由下式确定:

$$x_k' = \begin{cases} x_k + (u_k - x_k) r \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^b & \text{if random } (0, 1) = 0 \\ x_k - (x_k - l_k) r \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^b & \text{if random } (0, 1) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

式中, r 为界于 [0, 1] 的随机数; T 为最大遗传代数; t 为当前遗传代数; b 为非均匀度参数; random (0, 1) 表示产生 0 或 1 的随机数。

2.1.9　将 offspring1 和 offspring2 分别赋给新一代群体的 New-population (s)　New-population (s) = offspring1, $s = s + 1$, New-population (s) = offspring2, 至此, 步骤(6)～(9)完成产生 2 个新一代群体个体的过程。重复步骤(6)～(9), 直至产生 Popsize 个个体。

2.1.10　评价群体适应度　将新一代群体的 New-population (s) 赋给 Start-population (s), $s = 1, 2, \cdots$, Popsize。适应度计算同步骤(2)。

2.1.11　当前遗传代 Current-gen = Curreng-gen + 1　重复执行步骤(4)～(11), 直至终止代数 Maxgen。当输出最优个体 Best-individual 时, 停止遗传计算。

2.2　IPP 问题的 GA 求解

IPP 和 NPP 问题求解的差别在于某些遗传算子的选择。

2.2.1　选　择　选择算子同 NPP 问题, 采用锦标赛选择。

2.2.2　交　叉　交叉算子采用均匀交叉 (Uniform Crossover)。均匀交叉是指 2 个配对个体的每一个基因座上的基因都以相同的交叉概率进行交换, 从而形成 2 个新的个体[1]。对于个体 mate1 和 mate2 进行均匀交叉, 则交叉后产生 2 个个体 child1 和 child2,

其交叉的主要过程为[1]:

①随机产生与个体编码长度等长的屏蔽字 $W = w_1 w_2 \cdots w_j \cdots w_n$。

②个体mate1 和mate2 按下述规则产生2 个新的个体child1 和child2。

若$w_j = 0$, 则child1 在j 个基因座的基因值继承mate1 上对应的基因值; child2 在j 个基因座的基因值继承mate2 上对应的基因值。

若$w_j = 1$, 则child1 在j 个基因座的基因值继承mate2 上对应的基因值; child2 在j 个基因座的基因值继承mate1 上对应的基因值。

2.2.3 变 异 变异算子采用均匀变异(Uniform Mutation)。均匀变异是指分别用符合某一范围内均匀分布的随机数, 用某一较小的概率来替换个体编码串中各个基因座上原有的基因值[1]。假定个体child1= $x_1 x_2 \cdots x_k \cdots x_n$ 进行均匀变异, 产生的个体为offspring1= $x_1 x_2 \cdots x_k' \cdots x_n$, 若变异点$x_k$ 处的基因值取值范围为$[l_k, u_k]$, 则新的基因值x_k' 可由下式确定:

$$x_k = \mathrm{int}(l_k + r(u_k - l_k)) \tag{4}$$

式中, r 为介于[0, 1]的随机数; int 为取整函数。

3 实例应用

按前文所述的计算流程, 应用Matlab 6.0 编制了相应的求解程序。以下就几个实例应用说明本文算法的适用性。

3.1 NPP 优化问题实例应用

问题(1)

$$\begin{cases} \mathrm{Min} f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3 \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 - 100 \geq 0 \\ -(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 5)^2 + 82.81 \geq 0 \\ 13 \leq x_1 \leq 100 \\ 0 \leq x_2 \leq 100 \end{cases}$$

问题(2)

$$\begin{cases} \mathrm{Min} f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 \\ x_2 \leq 2x_1^4 - 8x_1^3 + 8x_1^2 + 2 \\ x_2 \leq 4x_1^4 - 32x_1^3 + 88x_1^2 - 96x_1 + 36 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

问题(3)

$$\begin{cases} \mathrm{Max} f(x_1, x_2, x_3) = \\ \dfrac{3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0.8}{2x_1 - 2x_2 + x_3} + \\ \dfrac{4x_1 - 2x_2 + x_3}{7x_1 + 3x_2 - x_3} \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\ 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 34.8 \\ 12x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 29.1 \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \leq -4.1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

问题(4)

$$\begin{cases} \mathrm{Min} f(x, y) = 5\sum_{i=1}^{4} x_i - 5\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{9} y_i \\ 2x_1 + 2x_2 + y_6 + y_7 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_3 + y_6 + y_8 \leq 10 \\ 2x_2 + 2x_3 + y_7 + y_8 \leq 10 \\ -8x_1 + y_6 \leq 10 \\ -8x_2 + y_7 \leq 0 \\ -8x_3 + y_8 \leq 0 \\ -2x_4 - y_1 + y_6 \leq 0 \\ -2y_2 - y_3 + y_7 \leq 0 \\ -2y_4 - y_5 + y_8 \leq 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 \leq y_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 9 \\ y_i \geq 0 \quad i = 6, 7, 8 \end{cases}$$

选取群体大小Popsize= 100, 锦标赛选择个体数tourn= 20, 交叉概率$p_c = 0.4$, 变异概率$p_m = 0.2$, 遗传终止代数Maxgen= 1 000, $\epsilon = 0.000\,01$。上述优化问题(1)～(4)的求解结果如表1 所示。

表1 NPP 优化问题求解实例对比结果

Table 1 The comparative solution of NPP between optimization values and GA's methods

优化问题 Optimum problems	准确解 Analysis results	GA 求解结果 GA's results
问题1 Problem 1	$x_1 = 14.1$; $x_2 = 0.8$; $f = -6\,962.5$	$x_1 = 14.098$; $x_2 = 0.801$; $f = -6\,962.498$
问题2 Problem 2	$x_1 = 2.329\,5$; $x_2 = 3.178\,3$; $f = -5.507\,9$	$x_1 = 2.329\,7$; $x_2 = 3.178\,8$; $f = -5.508\,5$
问题3 Problem 3	$x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $f = -2.471\,428$	$x_1 = 0.999\,5$; $x_2 = 0.000\,3$; $x_3 = 0.000\,0$; $f = -2.472\,1$
问题4 Problem 4	$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$ $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1$; $y_4 = 1$; $y_5 = 1$ $y_6 = 3$; $y_7 = 3$; $y_8 = 3$; $y_9 = 1$; $f = -15$	$x_1 = 0.000\,0$; $x_2 = 1.000\,0$; $x_3 = 1.000\,0$; $x_4 = 4.000\,0$ $y_1 = 1.000\,0$; $y_2 = 1.000\,0$; $y_3 = 1.000\,0$; $y_4 = 1.000\,0$; $y_5 = 1.000\,0$; $y_6 = 3.000\,1$; $y_7 = 3.000\,4$; $y_8 = 3.000\,2$; $y_9 = 1.000\,0$; $f = -15.000\,2$

3.2 IPP 优化问题实例应用

问题(1)

$$\begin{cases} \mathrm{Min}\quad f(x_1,x_2,x_3)=3x_1-2x_2+5x_3 \\ x_1+2x_2-x_3\leq 2 \\ x_1+4x_2+x_3\leq 4 \\ x_1+x_3\leq 3 \\ 4x_2+x_3\leq 6 \\ x_1,x_2,x_3=\{0,1\} \end{cases}$$

问题(2)

$$\begin{cases} \mathrm{Max}\quad f(x_1,x_2)=60x_1+30x_2 \\ 35x_1+8x_2\leq 400 \\ 1.5x_1+3.5x_2\leq 60 \\ 4x_1+5x_2\leq 90 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \\ x_1,x_2\ \text{取整数} \end{cases}$$

问题(3)为灌溉渠道轮灌配水优化模型[8], 如下所示, 共有 9×26=234 个决策变量, 9+2×26=61 个约束变量。

$$\mathrm{Min}\left\{\mathrm{Max}_{\substack{1\leq i\leq 9\\1\leq k\leq 9\\ i\neq k}}(T_i-T_k)\right\}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{26} t_j x_{ij}-336\leq 0 & i=1,2,\cdots,9 \\ \sum_{i=1}^{9} x_{ij}-1\leq 0 & j=1,2,\cdots,26 \\ -\sum_{i=1}^{9} x_{ij}+1\leq 0 & j=1,2,\cdots,26 \\ x_{ij}=\{0,1\} & i=1,2,\cdots,9;\ j=1,2,\cdots,26 \end{cases}$$

式中, x_{ij} 为轮灌组出水口的开关状态, 为决策变量, 其中 $x_{ij}=\{0,1\}$, $x_{ij}=0$ 表示出水口关闭, $x_{ij}=1$ 表示出水口开启; 26 为出水口(配水渠道)数; 9 为轮灌组划分数; t_j 为出水口引取水量所需的时间(h)。

选取群体大小 Popsize=100, 锦标赛选择个体数 tourn=20, 交叉概率 $p_c=0.3$, 变异概率 $p_m=0.2$, 遗传终止代数 Maxgen=1 000, $\epsilon=0.001$。上述优化问题(1)~(2)的求解结果如表2所示。

表2 IPP 优化问题求解实例对比结果

Table 2 The comparative solution of LIPP between optimization values and GA's methods

优化问题 Optimum problems	准确解 Analysis results	GA 求解结果 GA's results
问题1 Problem 1	$x_1=1; x_2=0; x_3=1; f=8$	$x_1=1; x_2=0; x_3=1; f=8$
问题2 Problem 2	$x_1=9; x_2=10; f=840$	$x_1=9; x_2=10; f=840$

优化问题(3)中各轮灌组引水时间和目标函数值与文献[8]结果对比列于表3。

表3 文献[8]模型与文中模型求解结果对比

Table 3 The comparative optimization results between the models in literature [8] and in this paper

文献[8]模型优化结果 Results of literature' model[8]				本文模型优化结果 Results of this paper model			
轮灌组 Rotation irrigation group	轮灌组斗口组合 Lateral canal combination	轮灌组引水时间/h Irrigation time of rotation irrigation group	轮灌组引水流量/($m^3\cdot s^{-1}$) Flow of of rotation irrigation group	轮灌组 Rotation irrigation group	轮灌组斗口组合 Lateral canal combination	轮灌组引水时间/h Irrigation time of rotation irrigation group	轮灌组引水流量/($m^3\cdot s^{-1}$) Flow of of rotation irrigation group
1	新10, 9, 新7, 3	323	0.2	1	20	333	0.2
2	11, 10, 4, 2	328	0.2	2	2, 14	328	0.2
3	17, 14	328	0.2	3	5, 16, 23	326	0.2
4	19, 7	329	0.2	4	9, 15, 18, 21, 22	331	0.2
5	23, 22, 16	329	0.2	5	3, 4, 17, 新20	326	0.2
6	退水, 12, 8	329	0.2	6	6, 11, 13	330	0.2
7	21, 15, 13, 5	330	0.2	7	7, 19	329	0.2
8	20	333	0.2	8	8, 12, 退水	329	0.2
9	18, 6, 1	332	0.2	9	1, 新7, 10,	329	0.2
目标函数 Target function		10		目标函数 Target function		7	

对比表1, 表2 和表3 可以看出, 本文GA 优化结果与准确解基本一致, 其中NPP 问题(3)的优化结果与其准确解参考值完全一致, IPP 问题(3)的优化结果优于文献[8]的求解值, 说明本文提出的GA 求

解NPP、IPP问题的算法是稳定的。

4 结　论

GA 求解约束优化问题是GA 研究中的热门问题之一。本文采用锦标赛选择、算术交叉、均匀交叉、均匀变异和非均匀变异算子,应用Matlab 6.0编制了相应的求解程序。通过几个实例的数值试验,计算结果表明,文中GA 优化结果与准确解一致,具有较强的通用性、精确性和稳健性。由于遗传算法目前是一个正在探索研究的算法,因此如何提高本文算法的性能及更好地进行运行参数选择等,有待于进一步研究。

[参考文献]

[1] 周　明,孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京:国防工业出版社,1999. 33-64.

[2] 孙艳丰,郑家齐,王德兴,等. 基于遗传算法的约束优化方法评述[J]. 北方交通大学学报,2000,24(6):14-19.

[3] Michalewicz Z A. Survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods[A]. McDonnell J R, Reynolds R G, Fogel D B. Processing 4th annual conference evolutionary programming[C]. Cambridge, MA: MIT Press, 1995. 135-155.

[4] Michalewicz Z, Schoenauer M. Evolutionary algorithms for constrained paprameter optimization problems[J]. Evolutionary Compution, 1996, 4(1): 1-32.

[5] Michalewicz Z, Deb K, Schmidt M, et al. Evolutionary algorithms for engineering application[A]. Miettinen K, Neittaanmäki P, Mäkelä M M, et al. Evolutionary algorithms in engineering and computer science[C]. Chichester, England: John Wiley and Sons, 1999. 73-94.

[6] Zbigniew Michalewicz, Martin Schmidt. TCG-2: A test-case generator for non-linear parameter optimisation techniques[A]. I Ashish Ghosh, Shigeyoshi Tsutsui. Advances in evolutionary computing, theory and applications[C]. Heidelberg, Germany: Springer, 2003. 193-212.

[7] Fernando Jiménez, José L Verdegay. Evolutionary techniques for constrained optimization problem[A]. Hans-Jürgen Zimmermann. 7th european congress on intelligent techniques and soft computing (EUFIT'99)[C]. Aachen, Germany: Springer, 1999.

[8] 吕宏兴,熊运章,汪志农. 灌溉渠道支斗渠轮灌配水与引水时间优化模型[J]. 农业工程学报,2000,16(6):43-46.

Genetic algorithm solution for constrained optimization

SONG Song-bai, CAI Huan-jie, KANG Yan

(*College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China*)

Abstract: Based on the principles of genetic algorithm, the general GA methods for Non Linear Programming and Integral Programming were designed by using operators such as Tournament Selection, Arithmetic Crossover, Uniform Crossover, Uniform Mutation and Non Uniform Mutation. Using Matlab 6.0, the computation program of GA has been developed. Finally, The GA for Non Linear Programming and Integral Programming is tested by some examples and the results show that the algorithm in this paper is feasible and stable.

Key words: non linear programming; integral programming; constrained optimization problem; genetic algorithm