第 32 卷　第 5 期　　西北农林科技大学学报(自然科学版)　　Vol. 32 No. 5
2004 年 5 月　　Jour. of Northwest Sci-Tech Univ. of Agri. and For. (Nat. Sci. Ed.)　　May 2004

特征向量的零输入解定理及其证法探讨*

王兆奇, 解元元

(陕西工业职业技术学院, 陕西 咸阳 712000)

[摘　要]　在研究线性状态方程的特征向量与零输入解二者关系的基础上, 推导出一个适用于线性定常连续系统的定理; 给出了各种证明方法, 并举例验证了定理的正确性。

[关键词]　线性定常系统; 特征向量; 零输入解

[中图分类号]　O231.1　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1671-9387(2004)05-0105-05

线性定常连续系统(以下简称"线性系统")状态方程的完全解由零输入解和零状态解组成, 其中零输入解取决于初始状态和状态转移矩阵[1~5]。若线性系统的初始状态与该系统某一实数特征根对应的特征向量重合, 则系统在这一初始状态下的零输入解只含这一个固有频率[6]。文献[6]对线性系统中特征向量与零输入解之间的这一关系虽有论述, 但只给出了一个证法, 且该证法的适用范围有限。此外, 还有几个问题有待研究: 1) 可否将其概括为一个定理; 2) 文献[6]的结论是否适用于重根、复根的情形; 3) 能否找到更为一般的简捷证法或找到多种证法。作者在探讨线性系统中特征向量与零输入解二者关系的基础上, 将研究结果概括为一个适用于线性系统的定理, 给出 4 种证明方法, 指出各个证法的适用范围, 并举例验证了定理在各种情形下的正确性。

1　定理及其证法

1.1　引　理

已知 n 阶线性系统的齐次状态方程为:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = A \cdot X(t),$$

其解为[1]:

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0_+) \tag{1}$$

式中, $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$ 为状态列向量, $n\times 1$ 阶; A 为状态方程的系数矩阵, $n\times n$ 阶; e^{At} 为状态转移矩阵, $n\times n$ 阶; $X(0_+) = X(t)\big|_{t=0^+}$ 为初始状态。

1.2　特征向量的零输入解定理

已知 n 阶线性系统的齐次状态方程为:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = A \cdot X(t),$$

$n\times 1$ 阶矩阵 Q_i 是 A 的特征根 λ_i 对应的特征向量。若初始状态 $X(0_+) = Q_i$, 则线性系统的零输入解:

$$X(t) = Q_i \cdot e^{\lambda_i t},$$

式中, $t\geq 0_+$; $i = 1, 2, \cdots, r$; r 是 A 的最大线性无关特征向量组的秩, $r\leq n$。

1.3　定理的证法

1.3.1　证法 1

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $Q_1\sim Q_n$, 则 n 阶方阵 $Q = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_n]$ 为非奇异矩阵[2]; 引入 n 阶对角方阵 $e^{\wedge t} \overset{\Delta}{=} \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]$, 并将线性变换关系[4] $e^{At} = Q\cdot e^{\wedge t}\cdot Q^{-1}$ 与条件 $X(0_+) = Q_i$ 代入式(1), 可得:

$$\begin{aligned} X(t) &= (Q\cdot e^{\wedge t})\cdot(Q^{-1}\cdot Q_i) \\ &= P_1(t)\cdot P_2 \end{aligned} \tag{2}$$

式中, $P_1(t) = Q\cdot e^{\wedge t} = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, \cdots, Q_n]\cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{\lambda_i t} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} =$

$[Q_1\cdot e^{\lambda_1 t}, Q_2\cdot e^{\lambda_2 t}, \cdots, Q_i\cdot e^{\lambda_i t}, \cdots, Q_n\cdot e^{\lambda_n t}]$;

$$P_2 = Q^{-1}\cdot Q_i = \frac{1}{|Q|}\cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & \cdots & Q_{n1} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{1i} & Q_{2i} & & Q_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{bmatrix}$$

---

* [收稿日期]　2003-04-25
[作者简介]　王兆奇(1957-), 男, 陕西合阳人, 教授, 主要从事电路研究。

式中, $|Q|$表示Q 的行列式; Q_{kj}是Q 中的元素 q_{kj}对应的代数余子式。当 $j \neq i$ 时, $\sum_{k=1}^{n}(q_{ki}\cdot Q_{kj})=0$; 当 $j=i$时, $\sum_{k=1}^{n}(q_{ki}\cdot Q_{ki})=|Q|$, 故有

$$P_2 = Q^{-1}\cdot Q_i = [0,0,\cdots,1,\cdots,0]^T$$

即 P_2 中只有惟一的非零元素"1", 且处于第 i 行。将 $P_1(t)$ 与 P_2 代入式(2), 得:

$$X(t) = P_1(t)\cdot P_2 =$$

$$[Q_1\cdot e^{\lambda_1 t}, Q_2\cdot e^{\lambda_2 t},\cdots,Q_i\cdot e^{\lambda_i t},\cdots,Q_n\cdot e^{\lambda_n t}]\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} =$$

$$Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$$

证毕。

1.3.2 证法2 设A 有 n 个不相关的特征向量 Q_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $Q=[Q_1,Q_2,\cdots,Q_n]$为非奇异矩阵, 且 $Q^{-1}\cdot A\cdot Q=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$, 则:

$$e^{At} = Q\cdot \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}]\cdot Q^{-1}$$

设 $Q_i=[q_{1i},q_{2i},\cdots,q_{ni}]^T$, $Q^{-1}=[Q_1',Q_2',\cdots,Q_n']^T$, $Q_j'=[q_{1j}',q_{2j}',\cdots,q_{nj}']$, $j=1,2,\cdots,n$。由于 $Q^{-1}\cdot Q=E$, 故:

$$Q_j'\cdot Q_j = \begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases} \quad (3)$$

而

$$e^{At} = Q\cdot\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}]\cdot Q^{-1} =$$

$$[Q_1,Q_2,\cdots,Q_n]\cdot\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_1'\\Q_2'\\\vdots\\Q_n'\end{bmatrix} =$$

$$Q_1\cdot Q_1'\cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2\cdot Q_2'\cdot e^{\lambda_2 t} + \cdots + Q_n\cdot Q_n'\cdot e^{\lambda_n t} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k\cdot Q_k'\cdot e^{\lambda_i t}$$

当 $X(0_+)=Q_i$ 时, 有:

$$X(t) = e^{At}\cdot Q_i = \left(\sum_{k=1}^{n}Q_k\cdot Q_k'\cdot e^{\lambda_i t}\right)\cdot Q_i =$$

$$Q_1\cdot Q_1'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_1 t} + Q_2\cdot Q_2'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_2 t} +$$

$$\cdots + Q_i\cdot Q_i'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_i t} + \cdots + Q_n\cdot Q_n'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_n t}$$

由式(3)知, 只有 $Q_i\cdot Q_i'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$这一项为非零项, 故:

$$X(t) = Q_i\cdot Q_i'\cdot Q_i\cdot e^{\lambda_i t} = Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$$

证毕。

以上两个证法均是从特征向量组 $Q_1\sim Q_n$ 线性无关这一条件出发得出定理的结论, 因此, 证法1 与2 有一定的局限性, 即二者均要求A 的 n 个特征向量线性无关。

1.3.3 证法3 由于 $e^{At}=E+A\cdot t+\frac{1}{2}\cdot A^2\cdot t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{t^k}{k!}\cdot A^k\right\}$, 则有:

$$X(t) = e^{At}\cdot X(0_+) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{t^k}{k!}\cdot A^k\cdot X(0_+)\right\} \quad (4)$$

由于 $X(0_+)=Q_i$, 并考虑 Q_i 为特征根 λ_i $(i=1,2,\cdots,r;\ r\leq n)$ 对应的特征向量, 即 $A\cdot Q_i=\lambda_i\cdot Q_i$, 则

$$A^k\cdot X(0_+) = A^k\cdot Q_i = A^{k-1}\cdot(A\cdot Q_i) =$$

$$\lambda_i\cdot A^{k-1}\cdot Q_i = \cdots = \lambda_i^k\cdot Q_i$$

代入式(4), 得:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(\lambda_i\cdot t)^k}{k!}\cdot Q_i\right\} = Q_i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(\lambda_i\cdot t)^k}{k!}\right\}$$

又

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(\lambda_i\cdot t)^k}{k!}\right\} = e^{\lambda_i t}$$

故:

$$X(t) = Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$$

证毕。

1.3.4 证法4 对状态方程 $\dot{X}(t)=A\cdot X(t)$两边取拉普拉斯变换, 并代入 $X(0_+)=Q_i$, 得:

$$(s\cdot E - A)\cdot X(s) = Q_i$$

$$X(s) = (s\cdot E - A)^{-1}\cdot Q_i \quad (5)$$

由文献[4]可知, 无论A 奇异与否, $(s\cdot E-A)^{-1}$一定存在, 且

$$(s\cdot E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{A^k}{s^{k+1}}\right\}$$

代入式(5), 有:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{A^k\cdot Q_i}{s^{k+1}}\right\} \quad (6)$$

又 $A^k\cdot Q_i=A^{k-1}\cdot(A\cdot Q_i)=\lambda_i\cdot A^{k-1}\cdot Q_i=\cdots=\lambda_i^k\cdot Q_i$, 代入式(6)得:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_i^k}{s^{k+1}}\cdot Q_i\right\} = Q_i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_i^k}{s^{k+1}}\right\}$$

故 $X(t)=\mathcal{L}^{-1}X(s)=Q_i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(\lambda_i\cdot t)^k}{k!}\right\}=Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$

证毕。

与证法1 和2 相比, 证法3 与4 并不要求A 必须有 n 个线性无关的特征向量, 且较为简捷。

2　特征轨迹

由本文定理可见, 在 n 阶线性系统中, 若取 A 的某特征向量作为系统的一组初始状态, 则其零输入解中只出现一个模态, 即这个特征根对应的那个模态。此时, 线性系统的状态轨迹呈直线状, 且与对应的特征向量重合。鉴于上述原因, 可将该状态轨迹叫做特征轨迹。若线性系统的 n 个特征根对应有 r 个线性无关的特征向量, 则系统共有 r 条特征轨迹。当 $r = n$ 时, 称零输入解是常态的; 当 $r < n$ 时, 则称零输入解是退化的。

3　实例分析

3.1　A 有不相等的非零实根

某线性系统的状态方程

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot X(t)$$

A 的特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$; 对应的特征向量依次为:

$$Q_1 = [1, 1, 0]^T, Q_2 = [1, -1, 1]^T,$$
$$Q_3 = [1, -1, 2]^T$$

若取初始状态分别为 $Q_1 = [1, 1, 0]^T, Q_2 = [1, -1, 1]^T, Q_3 = [1, -1, 2]^T$, 根据本文定理, 则有:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}, X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-2t},$$

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot e^{-3t}$$

以 $X_1(t)$ 为例, 计算可得 $\dot{X}_1(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$,

$A \cdot X_1(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$, 满足状态方程。

3.2　A 有零单根

已知某线性系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$ 是 A 的特征根之一, 其特征向量为 $Q_1 = [-1, 1, 1]^T$。若以 Q_1 为初始状态, 则零输入解为:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{0 \cdot t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

验证: 经计算, 得 $\dot{X}(t) = \mathbf{0}$, $A \cdot X_1(t) = \mathbf{0}$, 满足状态方程。

3.3　A 有复根

已知线性系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

其共轭复根为 $\lambda_2 = \sqrt{3} \cdot i$ 与 $\lambda_3 = -\sqrt{3} \cdot i$, 对应的特征向量分别为:

$$Q_2 = \left[\frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}, 1 \right]^T,$$

$$Q_3 = \left[\frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot i}{2}, 1 \right]^T$$

若分别以 Q_2, Q_3 为初始状态, 则相应的零输入解为:

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{(\sqrt{3} \cdot i) t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{3} \cdot t + \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \cdot t - i \cdot (\sqrt{3} \cos\sqrt{3} \cdot t - \sin\sqrt{3} \cdot t) \\ \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \cdot t - \cos\sqrt{3} \cdot t - i \cdot (\sqrt{3} \cos\sqrt{3} \cdot t + \sin\sqrt{3} \cdot t) \\ 2\cos\sqrt{3} \cdot t + i \cdot 2\sin\sqrt{3} \cdot t \end{bmatrix}$$

$$X_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{(-\sqrt{3} \cdot i) t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{3} \cdot t + \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \cdot t + i \cdot (\sqrt{3} \cos\sqrt{3} \cdot t - \sin\sqrt{3} \cdot t) \\ \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \cdot t - \cos\sqrt{3} \cdot t + i \cdot (\sqrt{3} \cos\sqrt{3} \cdot t + \sin\sqrt{3} \cdot t) \\ 2\cos\sqrt{3} \cdot t - i \cdot 2\sin\sqrt{3} \cdot t \end{bmatrix}$$

检验: $\dot{X}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{3 + \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \frac{3 - \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \sqrt{3} \cdot i \end{bmatrix} \cdot e^{(\sqrt{3} \cdot i) t}$, $A \cdot X_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{3 + \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \frac{3 - \sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \sqrt{3} \cdot i \end{bmatrix} \cdot e^{(\sqrt{3} \cdot i) t}$, 故 $X_2(t)$ 满足

状态方程。同理可知,$X_3(t)$亦满足状态方程。

一般地,实际系统的初始状态为实向量,如$X(0_+)=[1,-1,2]^T$,则有$[1,-1,2]^T=Q_2+Q_3$,相应的零输入解

$$X(t)=X_2(t)+X_3(t)=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{3}\cdot t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\cdot t\\ \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\cdot t-\cos\sqrt{3}\cdot t\\ 2\cos\sqrt{3}\cdot t\end{bmatrix}$$

为实函数向量。

3.4 有非零重根

已知线性系统

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}$$

的特征根为$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$,对应的特征向量分别为$Q_1=[1,0,1]^T$, $Q_2=[0,1,-1]^T$, $Q_3=[1,0,4]^T$。

若取特征根对应的特征向量为初始状态,则零输入解分别为

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot e^{-t},X_2(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot e^{2t},$$

$$X_3(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$$

其中,$X_2(t)$与$X_3(t)$为重根时不同特征向量对应的解。

检验:可由$X_2(t)$计算得:$\dot{X}_2(t)=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$,

$A\cdot X_2(t)=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$,满足状态方程。

同理:$\dot{X}_3(t)=\begin{bmatrix}2\\0\\8\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$, $A\cdot X_3(t)=\begin{bmatrix}2\\0\\8\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$,满足状态方程。

3.5 $r<n$的情形

已知

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

特征根$\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$为二重根,对应的特征向量为:

$Q_1=[0,0,1]^T$, $Q_2=[-1,-2,1]^T$

取$X(0_+)=Q_i(i=1,2)$时,有

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot e^{2t},X_2(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot e^{t}$$

检验:$\dot{X}_1(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$, $A\cdot X_1(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\cdot e^{2t}$;

$\dot{X}_2(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot e^{t}$, $A\cdot X_2(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot e^{t}$;均满足状态方程,故解答正确。

4 结 语

由1.3.1~1.3.4的4个证法及3.1~3.5的5个例子可以看出,对于n阶线性齐次状态方程$\frac{dX(t)}{dt}=A\cdot X(t)$来说,当初始状态$X(0_+)$取为$A$的某个特征根$\lambda_i$对应的特征向量$Q_i$时,无论特征根$\lambda_i$为何值,均有$X(t)=Q_i\cdot e^{\lambda_i t}$成立,其中,$t\geq 0_+$; $i=1,2,\cdots,r$; r是A的最大线性无关特征向量组的秩,$r\leq n$。以此为基础,可以建立起一种适合于线性系统状态方程零输入解的简便而有效的数值求解方法。

[参考文献]

[1] 王 蔼. 基本电路理论[M]. 上海:上海交通大学出版社,1987.

[2] Balabanian Norman, Bickart Theodore A. Electrical network theory[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1969.

[3] 黄金满. 网络理论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1988.

[4] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京:国防工业出版社,1994.

[5] 刁秋庭. 网络分析导论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,1997.

[6] 陈崇源. 高等电路[M]. 武汉:武汉大学出版社,2000.

[7] 王淑敏. 常见题型解析及模拟题[M]. 西安:西北工业大学出版社,2000.

An exploration into various proofs of a theorem about characteristic vectors and zero-input responses

WANG Zhao-qi, XIE Yuan-yuan
(*Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang, Shaanxi* 712000, *China*)

Abstract: Based on discussing the relationship between characteristic vectors and zero-input-responses, a theorem is established which is applicable for linear, time-invariant and continuous systems. In addition, different proofs and several examples are given to illustrate the theorem.

Key words: linear and time-invariant system; characteristic vector; zero-input response

---

(上接第 104 页)

Using direct search-simulated annealing algorithm to identify parameters of a water quality model

SHEN Wei[1], GUO Zong-lou[1], ZHOU Xin-chao[2]
(1 *College of Biosystem Engineering and Food Sciences, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*;
2 *Hangzhou Water Company, Hangzhou, Zhejiang* 310016, *China*)

Abstract: Parameter identification is a key technique in the establishment of water quality model. A direct search-simulated annealing algorithm (DSA) for parameter identification of a water quality model, which is memory-based, is proposed and has been applied in the parameter identification of O'connor water quality model. Results of a case show an improved performance in finding the global minimum. DSA provides a new way to identify parameters of water quality model.

Key words: direct search-simulated annealing (DSA); water quality model; parameter identification