确定最优轮伐期的实物期权方法*

焦媛媛, 韩文秀, 杜　军
(天津大学 管理学院, 天津 300072)

[摘　要]　基于实物期权理论, 在假设木材价格符合几何布朗运动的基础上, 建立了确定最优轮伐期的实物期权模型, 并给出了相应的算法, 最后进行了案例分析。

[关键词]　实物期权; 轮伐期; 林业经济
[中图分类号]　S757.4+4, F830.59　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1671-9387(2003)05-0169-04

最优轮伐期的确定一直是林学研究的重点和热点, Bowes 和 Krutilla[1] 以及 Clark[2] 采用传统的净现值法来确定林分的经济成熟龄。然而, 净现值法要求所有的变量是时间的确定性函数, 因而无法分析不确定性环境带来的期权价值。而且在现实的经济社会中, 木材的价格具有不确定性, 是随机波动的。运用传统净现值分析方法解决上述问题时存在着很大的缺陷。

实物期权方法是评价不确定性环境下投资决策的一种有效工具, 众多学者运用实物期权方法对投资项目中的营运柔性(Operating Flexibility)评价和管理柔性(Managerial Flexibility)评价进行了大量研究, 在房地产投资、医药行业、研发(R & D)和专利等领域取得了一定进展[3~5], 然而对实物期权在林业中的应用研究比较鲜见。本文基于实物期权理论, 假设木材价格符合几何布朗运动, 在此基础上, 建立了确定最优轮伐期的实物期权模型, 并给出了相应的算法, 以期为最优轮伐期的确定提供参考。

1　最优轮伐期确定模型

从经济学上看, 林分的采伐问题在本质上与美式买权相同, 但由于美式期权的计算非常复杂且很难得到解析解, 因此本文采用直观性强、易于使用而且计算有效的二项式期权定价模型。在构造模型之前, 首先需要进行一些必要的假设。

1.1　模型假设

确定最优轮伐期的实物期权模型遵从以下假设:

(1) 根据实物期权理论, 首先假设木材价格的变动符合几何布朗运动, 即可以表示为以下随机微分方程:

$$\frac{dP}{P} = \mu ds + \sigma dz \tag{1}$$

式中, μ 和 σ 分别为木材价格 P 的瞬时期望增长率和标准差(波动率); s 为时间; dz 为标准维纳过程的微分。

(2) 贴现率 r 为已知常数。

(3) 林分蓄积量是时间 s 的确定函数, 记为 Q_s。

1.2　二项式定价模型

构造二项式定价模型的关键在于确定标的资产的涨跌因子和涨跌概率。Trigeorgis[6] 给出了确定涨跌因子和涨跌概率的方法, 解决了 Cox 等模型的负概率和不收敛问题, 保证了模型的一致性、稳定性和计算的有效性。假设期权的到期时间被平均分成 T 个阶段, 时间间隔 Δt 表示一个阶段的时间。根据式(1), 在时间间隔 Δt 内, 涨跌因子和涨跌概率可以按照下式确定:

$$u = \frac{1}{d} = e^{\sqrt{\sigma^2\Delta t + (\mu - 0.5\sigma^2)^2\Delta t^2}} \tag{2}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu - 0.5\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + (\mu - 0.5\sigma^2)^2\Delta t^2}}\Delta t\right) \tag{3}$$

式中, u 和 d 分别表示木材价格的上涨因子和下跌因子; e 为自然对数底数(2.718 281 828 459 04); p 和 $1-p$ 分别为上涨概率和下跌概率。经过 t 个阶段(每个阶段时间为 Δt)后, 若木材价格上涨 i 次, 则木材价格变化为

$$P_{ti} = u^i \cdot d^{t-i} \cdot P_{00}$$

* [收稿日期]　2003-03-28
[基金项目]　国家自然科学基金项目(70042003)
[作者简介]　焦媛媛(1970-), 女, 天津市人, 博士后, 主要从事金融工程和工业工程研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$t = 0, 1, 2, \cdots, T; \quad i = 0, 1, 2, \cdots, t \tag{4}$$

式中, P_{00}表示木材的当前价格; P_{ti}的下标 t 和 i 分别表示阶段和价格上涨次数。因此, 木材价格的可能变化值由阶段 t、价格上涨次数 i 2 个变量来描述。

1.3 决策过程与算法

林分的收益现值由木材价格 P_{ti}和林龄 j 2 个因素来决定, 而木材价格 P_{ti}又是由阶段 t 和木材价格上涨次数 i 2 个变量确定, 因此记林分的现值为 $V(t, i, j)$ ($j = 1, 2, \cdots, J + t$, 其中 J 表示开始阶段时林分的最大林龄)。由于 J 表示开始阶段时林分的最大林龄, 因此在阶段 t 时林龄 j 最大为 $J + t$, 即 $j \leq J + t$。采用价值最大原则来进行采伐策略的选择, 采伐策略包括 3 种: 一是不采伐, 即等待策略(记为 $\{W\}$), 在下一个阶段 $t+1$ 时, 就有 2 种可能的状态 $V(t+1, i+1, j+1)$ (价格上涨) 和 $V(t+1, i, j+1)$ (价格下跌); 二是采伐后进行更新, 即更新策略(记为 $\{R\}$), 则在下一个阶段 $t+1$ 时, 有 2 种可能的状态 $V(t+1, i+1, 1)$ (价格上涨) 和 $V(t+1, i, 1)$ (价格下跌); 三是采伐后转作他用, 即放弃策略(记为 $\{A\}$), 则可以获得价值 V_a。图 1 描述了基于二项树的采伐策略决策过程。

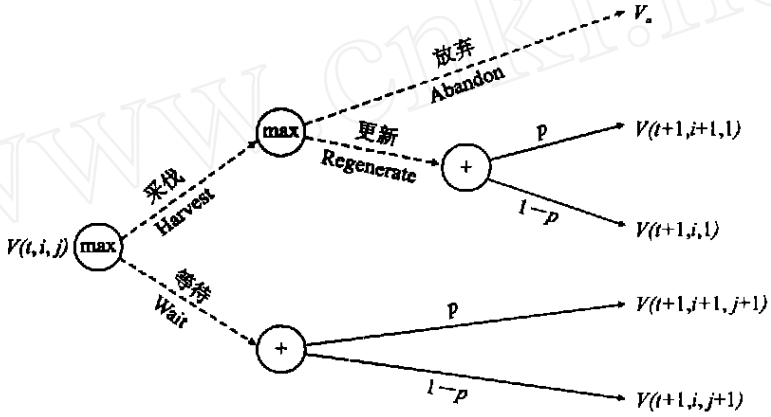

图 1 基于二项树的采伐策略决策过程

Fig. 1 Binomial tree for harvest decision process

如果采用等待决策, 则在阶段 t、价格上涨 i 次和林龄为 j 的情况下, 林分价值的期望值可以表示为:

$$V_{tij}^{W} = e^{-r\Delta t} \cdot [p \cdot V(t+1, i+1, j+1) + (1-p) \cdot V(t+1, i, j+1) - C_a] \tag{5}$$

式中, r 表示贴现率; C_a 表示在 Δt 时间内的管理成本; V_{tij}^{W}的下标 t、i、j 分别表示阶段、价格上涨次数和林龄, 上标 W 表示等待策略。

如果采用更新策略, 则林分价值的期望值可以描述为:

$$V_{tij}^{R} = P_{ti} \cdot Q_j + e^{-r\Delta t} \cdot [p \cdot V(t+1, i+1, 1) + (1-p) \cdot V(t+1, i, 1) - C_a] - C_r \tag{6}$$

式中, Q_j 表示林龄为 j 时的林分蓄积量; C_r 表示更新成本; V_{tij}^{R}的上标 R 表示更新策略。

如果采用放弃策略, 则林分价值的期望值是:

$$V_{tij}^{A} = P_{ti} \cdot Q_j + V_a \tag{7}$$

式中, V_a 表示转作他用所获得的价值; V_{tij}^{A}的上标 A 表示放弃策略。

根据价值最大原则, 在阶段 t、价格上涨 i 次和林龄为 j 的情况下, 林分的价值为

$$V(t, i, j) = \max\{V_{tij}^{W}, V_{tij}^{R}, V_{tij}^{A}\} \tag{8}$$

因此, 3 个策略中价值最大的策略就是最优采伐策略, 设 D_{tij}表示在阶段 t、价格上涨 i 次和林龄为 j 时的最优采伐策略。

为了得到最优轮伐期 T_{opt}, 需要从最后阶段 T 向前递推(图 2), 假设在最后一个阶段 T 采用放弃策略, 即 $D_{Tij} = \{A\}$, 其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, T$; $j = 1, 2, \cdots, J + T$。则在最后阶段 T 的相应林分价值为

$$V(T, i, j) = V_{Tij}^{A} = P_{Ti} \cdot Q_j + V_a \tag{9}$$

如图 2 所示, 递推过程的算法步骤为:

Step 1 初始化

```
t = T
FOR i = 0 TO T
    P_Ti = u^i · d^(T-i) · P_00
    FOR j = 1 TO J + T
        D_Tij = {A}
        V^A_Tij = P_Ti · Q_j + V_a
    END FOR
END FOR
```

Step 2 根据二项树迭代

$t = t - 1$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

FOR $i = 0$ TO t

$P_{ti} = u^{i} \cdot d^{t-i} \cdot P_{00}$

FOR $j = 1$ TO $J + t$

计算 $V^{W}_{tij}, V^{R}_{tij}, V^{A}_{tij}$

$V(t, i, j) = \max\{V^{W}_{tij}, V^{R}_{tij}, V^{A}_{tij}\}$

得到最优决策 D_{tij}

END FOR

END FOR

Step 3　IF $t = 0$ THEN go to Step 4 ELSE go to Step 2

Step 4　$T_{opt} = \min\{j \mid D_{0,0,j} = \{R\} \text{ or } \{A\}\}$

递推过程结束后, 得到不同林龄 j 条件下的当前阶段最优决策 $D_{0,0,j}$, 那么最优轮伐期 T_{opt} 就是采用更新策略或放弃策略的最小林龄。

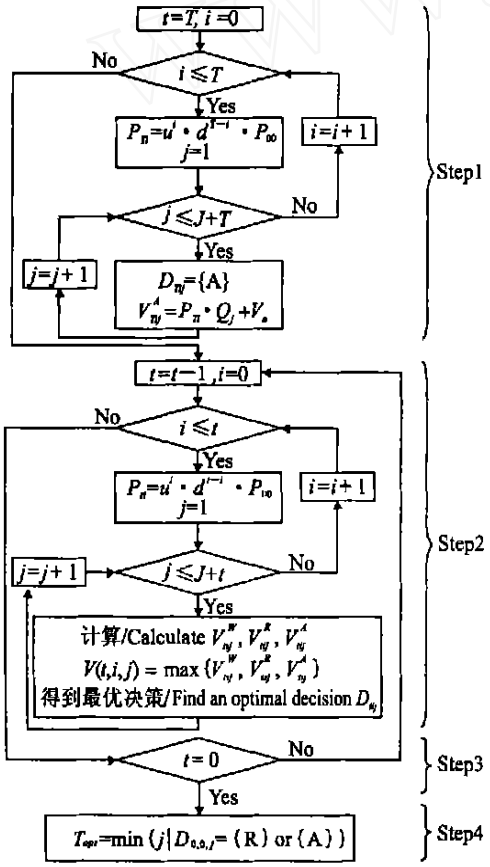

图 2　递推过程的流程图

Fig. 2　The flow chart of the recursive procedure

2　案例分析

以某林场的一个雪松林分为例进行分析。该林场的年管理成本 C_a 为 600 元/hm^2, 更新成本 C_r 为 10 000 元/hm^2, 年贴现率 r 为 3%, 转作他用的价值 V_a 为 0。根据以往数据, 通过最大似然法估计[7], 雪松价格变动服从以下过程:

$$dP = 0 \cdot P\,ds + 0.2 \cdot P\,dz$$

林分蓄积量增长过程满足以下方程:

$$Q_s = 360(1 - e^{-0.06s})^3$$

根据以上数据建立二项树模型。从长期管理规划的角度出发, 假设 10 年为 1 个时间单位。设二项树的时间间隔为 1 年, 即 $\Delta t = 1/10$。根据式(2)和(3)计算得到上涨因子 $u = 1.060$, 下跌因子 $d = 0.943$, 上涨概率 $p = 0.485$。

取计算周期 T 为 100 年, J 为 80 年, 根据递推算法, 得到在不同当前价格 P_{00} 条件下的最优轮伐期。图 3 说明了木材的当前价格与最优轮伐期之间的关系, 当 $P_{00} < 119$ 时, 最优轮伐期为 0, 最优策略是放弃策略, 这说明由于当前价格过低, 当前雪松林分带来的收益不能抵消管理成本, 应该立即将这个林分转作他用。当 $119 < P_{00} < 231.5$ 时, 最优策略是放弃策略, 这说明当前雪松林分带来的收益高于管理成本, 但是当采伐后, 更新后的雪松林分带来的收益不能抵消管理成本和更新成本, 因此应采用放弃策略, 根据图 3 可知, 在这一区间中, 当前价格与最优轮伐期是正相关。当 $P_{00} > 231.5$ 时, 最优策略为更新策略, 这说明更新后的雪松林分带来的收益高于管理成本和更新成本之和, 而且在这一区间中当前价格与最优轮伐期是负相关。

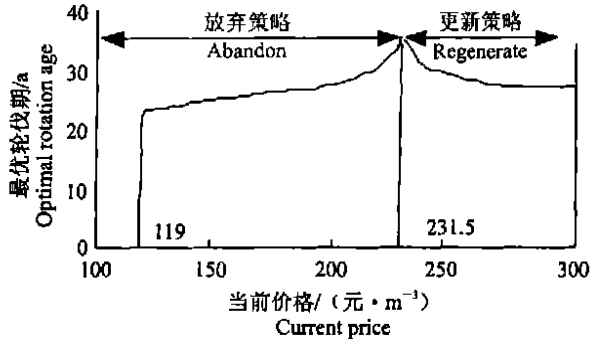

图 3　当前价格与最优轮伐期之间的关系

Fig. 3　The relation between current price and optimal rotation

3　结束语

由于不确定性市场的影响, 最优轮伐期的确定依赖于不确定性的结果, 实物期权方法是确定不确定性环境下最优轮伐期的一种有效工具。尽管实物期权方法在林业中可以得到很好的应用, 但在实际应用过程中, 还应该注意模型成立的条件。例如, 由于不同树种的分布地区和需求不尽相同, 木材价格不一定服从几何布朗运动, 可能服从其他随机过程,

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

比如均值回复过程, 此时需要对决策过程和算法进　　行相应修改。

[参考文献]

[1] Bowes M D, Krutilla J V. Multiple use management of public forestlands[A]. Kneese A V, Sweeney J L. Handbook of natural resource and energy economics[C]. Amsterdan: North-Holland, 1985.

[2] Clark C W. Mathematical bioeconomics[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1990.

[3] Nordvik V. Cost dispersion, reentry costs, and rental housing markets[J]. Journal of Housing Economics, 2000, 9(3): 129- 149.

[4] 胡　飞, 杨　明. 一类研究与开发(R &D)项目的投资价值[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2002, 30(6): 76- 78.

[5] Coff R W, Laverty K J. Real options on knowledge assets: panacea or pandora's box? [J]. Business Horizons, 2001, 44(6): 73- 79.

[6] Trigeorgis L. A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1991, 26(3): 309- 326.

[7] 陆　璇. 应用统计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.

A real option approach to determine an optimal rotation age

JIAO Yuan-yuan, HAN Wen-xiu, DU Jun

(*School of Management, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract: Assumed that log prices follow the geometric Brownian motion, a binomial lattice model for determining an optimal rotation age is proposed based on real option theory. Then an algorithm to solve the model is developed. In the end, a case study conducted in a forest firm is reported.

Key words: real option; rotation age; forestry economy

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net