

试论 Archimedes 的数学思想^{*}

王乃信, 吴养会

(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘 要] 依据 Archimedes 的数学贡献, 尤其是 Archimedes 在求抛物线弓形面积时所创立的方法, 分析了 Archimedes 的数学思想, 认为 Archimedes 既善于进行巧妙的物理论证, 又善于进行严格的数学论证。由 Archimedes 的数学思想得到的启示是: 巧妙的物理论证是科学发现的重要方法; 严格的数学论证是确立结论的必需步骤; 要精选若干基本原理, 作为论证的基础; 要献身科学真理, 不为俗世需求所动摇。

[关键词] Archimedes; 抛物线弓形; 物理论证; 数学论证

[中图分类号] O 112

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2003)02-0181-04

20 世纪的著名数学家、数学直观派代表人物 Weyl (1885~1955 年) 说过: “如果不知道远溯古希腊各代前辈所建立和发展的概念、方法和结果, 我们就不可能理解近五十年来数学的目标, 也不可能理解它的成就”^[1]。这就是说, 研究古希腊的数学思想, 对当代数学的发展仍具有很大的借鉴作用。在古希腊的数学思想中, Archimedes 的数学思想是非常突出的。在物理学史中, 人们把 Archimedes (公元前 287~公元前 212 年) 称为物理学家, 而在数学史中, 人们又把 Archimedes 与 Newton (1642~1727 年)、Gauss (1777~1855 年) 并列, 合称为自古以来 3 个最伟大的数学家^[1]。Archimedes 的数学思想很值得进一步深入挖掘和研究。

1 Archimedes 在数学史上的贡献

Archimedes 的数学著作被数学史称为古希腊数学的顶峰。他对圆锥曲线有非常深入的研究; 曾用几何方法求解过一类三次方程, 还求解过含 8 个未知量且数据很大的方程。他曾断言: 两条不等的线, 两个不等的面, 或者两个不等的体, 只要把可比较的量中的小的扩大到适当的倍数, 便会比大的那一个更大^[2]。后人将他的这一论断誉称为 Archimedes 公理。到 19 世纪, 人们才终于明白, Archimedes 公理是对实数连续性描述的不可缺少的重要部分, 因而对于构建实分析的基础和体系起着重要作用^[3,4]。正由于这一点, Archimedes 才坚信 Eudoxus (约公元

前 408~公元前 355 年) 的穷竭原理的正确性, 并能随心所欲地应用穷竭原理。

Archimedes 以极高的严格性和技巧性, 解决了一大批在当时很难解决的数学问题, 例如: 他从少数几个定义和公理出发, 逻辑地推论出 50 多个重要的数学命题, 求出了圆的周长和面积, 求出了球体及球缺的表面积和体积, 求出了抛物线弓形的面积, 求出了螺线所包围的面积, 求出了椭球体和许多旋转体的体积等。而这些问题的一般解法直到 17 世纪才由 Newton 和 Leibniz (1646~1716 年) 等人用微积分方法给出。数学史认为, Archimedes 的数学思想远远超过了他的同时代人, Archimedes 早已具有微积分思想的雏形, 而且, Archimedes 的严格性和技巧性比微积分创始人 Newton 和 Leibniz 高明得多^[1]。

Archimedes 的数学思想深邃而富有启发性。古希腊的传记作家、历史学家 Plutarch (约 46~120 年) 曾这样赞扬 Archimedes: “把这样困难的题目解决得如此简单和明白, 在数学里没有听说过, 假如有谁尝试一下自己解这些题目, 他会什么也得不到。但是, 如果他熟悉了 Archimedes 的解法, 那么他就会立刻得出这样的印象: 这个解法他自己也会找到。Archimedes 用如此容易和简明的方法把我们引向目的”^[5]。Archimedes 的贡献如此之大, 以至于微积分创始人之一 Leibniz 也曾感叹说: “了解 Archimedes 与 Apollonius 的人, 对后代杰出人物的成就不会再那么钦佩了”^[1]。

^{*} [收稿日期] 2002-03-19

[作者简介] 王乃信(1942-), 男, 陕西户县人, 教授, 博士生导师, 主要从事数学和计算机应用研究。

2 从抛物线弓形面积问题看 Archimedes 的数学思想

Archimedes 曾用两种巧妙而严格的方法求抛物线弓形的面积。由于 Archimedes 的表述方式和现代的表述方式差距太大, 为了便于阅读理解, 采用现代表述方式, 但是, 将仍忠实于 Archimedes 的思想。

Archimedes 要解决的问题是: 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, 任取 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 求抛物线 $y^2 = 2px$ 与弦 AB 所围平面图形的面积 S 。不失一般性, 设 $p > 0$ 。为方便计, 该面积 S 以后简称为张在弦 AB 上的抛物线弓形的面积。

2.1 力学方法(杠杆原理)

该方法写在 Archimedes 的论文《论力学定理、方法》中。这篇论文 Archimedes 写好后寄给他的朋友 Eratosthenes(公元前 276~公元前 195 年), 一直被认为丢失了。但是, 1906 年, 希腊数学家、历史学家 Heiberg 终于在君士坦丁堡发现了这篇重要的文献^[6]。

在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, 任取 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点($y_2 > y_1$), 则弦 AB 的方程为 $x = \frac{y_1 + y_2}{2p}y - \frac{y_1 y_2}{2p}$, 过弦 AB 上任意点 $Q(x, y)$, 作抛物线对称轴的平行线, 交抛物线于 R , 则 QR 的长度为

$$QR = \frac{1}{2p}(y_2 - y)(y - y_1)。$$

由此可知, 过弦 AB 的中点 $F(x_0, y_0)$, 作抛物线对称轴的平行线, 交抛物线于 G , 则 FG 的长度为 $FG = \frac{1}{8p}(y_2 - y_1)^2$ 。过点 A 作抛物线对称轴的平行线, 交 BG 的延长线于 E , 延长 AE 到 C , 使 $AE = EC$ 。延长 QR 交 BE 于 T , 交 BC 于 H 。又延长 BE 到 W , 使 $BE = EW$ 。易知 $AC = \frac{1}{2p}(y_2 - y_1)^2$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S^* = \frac{1}{4p}(y_2 - y_1)^3。$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{TE}{EW} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\frac{1}{2p}(y_2 - y)(y - y_1)}{\frac{1}{2p}(y_2 - y)(y_2 - y_1)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2p}(y_2 - y)(y - y_1)}{\frac{1}{2p}(y_2 - y_1)^2 \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}} = \frac{QR}{AC} = \frac{QR}{QH}。 \end{aligned}$$

Archimedes 的思想巧妙之处是: 选取点 E 为支点, 如果将线段 QR 集中放置在点 W 处, 则与线段 QH 平衡; 由此进一步断言: 选取点 E 为支点, 如果将张在弦 AB 上的抛物线弓形集中放置在点 W 处, 则与 $\triangle ABC$ 平衡。根据杠杆原理, 张在弦 AB 上的抛物线弓形面积即为 $\triangle ABC$ 面积的 $1/3$, 即

$$S = \frac{1}{3}S^* = \frac{1}{12p}(y_2 - y_1)^3。$$

由此可见, Archimedes 善于灵活运用物理原理, 通过巧妙的物理论证, 发现数学结论。

2.2 几何方法(穷竭原理)

该方法写在 Archimedes 的著作《论抛物线的求积法》中。在该著作中, Archimedes 先简述了求抛物线弓形的力学方法, 但面积的选取与上面所述不同, 然后, Archimedes 并未满足于物理论证, 而是紧接着详述了几何方法, 这是一种严格的数学论证方法^[1]。

过弦 AB 的中点 $F(x_0, y_0)$, 作抛物线对称轴的平行线, 交抛物线于 G , 注意到 $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, 及过点 G 所作抛物线的切线为 $yy_0 = px + \frac{1}{2}y_0^2$, 显然, 该切线与弦 AB 平行。设 $\triangle ABG$ 的面积为 S_0 , 则 $S_0 = \frac{1}{16p}(y_2 - y_1)^3$, 并且张在弦 AB 上的抛物线弓形面积 S 满足

$$S_0 < S < S_0 + S_0,$$

对张在弦 AG 和 GB 上的抛物线弓形作完全相同的分析得

$$S_0 + \frac{1}{4}S_0 < S < S_0 + \frac{1}{4}S_0 + \frac{1}{4}S_0,$$

重复这种分析即得

$$S_0(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}) < S <$$

$$S_0(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n}),$$

注意到对于任意的自然数 n , 均有

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3},$$

因而, Archimedes 根据穷竭原理得出结论: 张在弦 AB 上的抛物线弓形面积恰为 $\triangle ABG$ 面积的 $4/3$, 不可能更大, 也不可能更小, 即

$$S = \frac{4}{3}S_0 = \frac{1}{12p}(y_2 - y_1)^3。$$

在这里, Archimedes 虽然表面上没有用极限的表述形式, 但他仍然根据穷竭原理作出了完全等价和非常严格的论证, 使结论无可置疑。由此可见,

Archimedes 还善于通过严格的数学论证使结论得到进一步确立。

3 Archimedes 的数学思想带给我们的启示

3.1 巧妙的物理论证是科学发现的重要方法

Archimedes 用杠杆原理求抛物线弓形的面积, 是 Archimedes 通过物理论证得出数学结论的一个很好的范例。Archimedes 是这样评价他的物理论证方法的: “我相信这个方法会对数学起不小的作用”, “甚至对于证明定理本身也同样有用”, “一旦这个方法确立之后, 有些人, 或者我的同时代人, 或者我的后继者, 就会利用这个方法又发现另外一些定理, 而这些定理是我所没有想到的”^[7]。Archimedes 启示我们, 物理世界能为我们提供生动的数学模型, 在这些模型中, 复杂的数学过程常常是自动完成的, 要善于利用这些模型, 借助巧妙的物理论证, 直接发现数学结论。

例如: 根据独立作用原理, 设物体在平面上绕坐标原点作逆时针方向的等速圆周运动, 又设半径为 1, 角速度为 1, 则该运动可以分解为 x 方向和 y 方向上的两个独立的分运动:

$$x = \cos t, y = \sin t$$

注意到圆周运动速度矢量的方向为切向, 其在 x 方向和 y 方向上的投影恰为 x 方向和 y 方向上的两个分运动的速度:

$$v_x = -\sin t, v_y = \cos t$$

我们实际上通过物理论证得到了如下重要结论:

$$(\cos x)' = -\sin x, (\sin x)' = \cos x$$

3.2 严格的数学论证是确立结论的必需步骤

Archimedes 把物理论证作为发现数学结论的方法是很成功的。但是, Archimedes 从未满足于物理论证, 他总是紧接着寻求更严格的数学论证方法。Archimedes 用杠杆原理得到抛物线弓形的面积后, 又成功地用穷竭原理作出了更严格的几何证明。由此不难理解, 为什么 17 世纪的数学家在创建微积分时, 常常把 Archimedes 作为数学论证的榜样^[4]。

我们前面用独立作用原理所得到的结果是可信的, 但还需要补充更严格的数学论证。

又如: 我们考察曲线 $y = \frac{1}{x}$ 下, 区间 $[1, x_0]$ 上的平面图形的面积 $S(x_0)$ 。根据祖氏原理(“幂势既同, 则积不容异”), 或根据守恒原理, 易知 $S(x_0)$ 满足对数律^[8]。可以严格证明, $S(x_0) = \ln(x_0)$ 。实际上, 用

直线 $x = x_0^{\frac{i}{n}}$ (其中 $i = 1, 2, \dots, n-1$) 将该平面图形分为 n 份, 设其面积分别为 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 显然

$$1 - x_0^{-\frac{1}{n}} = x_0^{-\frac{1}{n}} (x_0^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{i-1}{n}}) < S_i < x_0^{-\frac{i-1}{n}} (x_0^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{i-1}{n}}) = x_0^{-\frac{1}{n}} - 1,$$

记 $S = S(x_0)$, 则有

$$n(1 - x_0^{-\frac{1}{n}}) < S < n(x_0^{\frac{1}{n}} - 1), \\ (1 + S/n)^n < x_0 < (1 - S/n)^{-n}$$

由此知

$$x_0 = \exp(S), S(x_0) = \ln(x_0).$$

我们实际上用严格的数学论证证明了如下重要结论:

$$\int (1/x) \cdot dx = \ln(x_0), (\ln x)' = 1/x.$$

3.3 要精选若干基本原理, 作为论证的基础

Archimedes 的科学思想远远超过他的同时代人, 这不仅因为他科学思想的深邃, 更因为他善于把他的结论抽象提高为原理, 并且坚信不疑, 进而作为以后论证的基础。因而, Archimedes 在建立科学概念和构建科学体系中的作用是非常巨大的。

Archimedes 在其著作《论球和圆柱体》中, 提出了 5 条公理^[2], 作为其数学论证的出发点, 其中的第五公理, 就是著名的 Archimedes 公理, 它在数学中的地位已如前所述。

Archimedes 发现浮力原理时, 兴奋之极, 竟然跳出了浴盆, 赤身跑到叙拉古城的大街上高喊 “Eureka! Eureka!” 后人为了纪念他, 称浮力原理为 Archimedes 原理^[6]。

Archimedes 首次提出了杠杆原理, 并把它推向极致。他被杠杆原理所感动, 在给国王 Hieron 的一封信中宣称: “给我一个支点, 我就能移动地球。” 尤其值得称赞的是他还把杠杆原理用于求复杂图形的面积和体积, 获得了许多惊人的重要数学结论^[6]。

受 Archimedes 的启发, 我们也把物理世界中的一些普遍适用的基本自然原理, 作为进一步论证的基础。我们认为, 这些原理应该包括独立作用原理、守恒原理、穷竭原理、最佳原理、加法原理、乘法原理等。我们已经根据独立作用原理、守恒原理等, 得出了一些基本初等函数微积分的基本结果, 在微积分法中, 再根据加法原理建立分部法, 根据乘法原理建立换元法, 便能从这些结果出发, 推导出一整套完整的初等函数微积分学^[8]。

3.4 要献身科学真理, 不为俗世需求所动摇

Plutarch 说: “Archimedes 志气如此之高, 心灵

如此之幽深,科学知识如此之丰富,以致虽然他的这些发明使人们把他看得神乎其神”,他却“把所有直接为了使用和谋利的机械和技巧都看作是卑贱之事,而一心追求那美妙的不夹杂俗世需求的学问。”我们从Archimedes发现浮力原理时忘乎所以的兴奋举动中,就可以体会到这一点^[1]。据记载,公元前212年罗马人攻入叙拉古时,Archimedes仍在专心致志地研究数学,罗马士兵杀害他时,他说的最后一句话竟是:“不要动我的图!”正如哲学家、数学家

Whitehead (1861~1947年)所说:Archimedes是唯一一位“由于全神贯注于对一个数学图形的冥想而丧生”的数学家^[6]。罗马人为了谢罪,也表示对Archimedes的敬意,后来为Archimedes建造了一座费工很多的陵墓,墓碑上铭刻了Archimedes所发现的一个重要定理,作为对Archimedes的永久纪念^[1]。Archimedes献身科学真理的精神永远值得我们学习。

[参考文献]

- [1] Kline M. 古今数学思想[M]. 张理京, 张锦炎, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1979. 114-207.
- [2] 鲁又文. 数学古今谈[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1984. 89-96.
- [3] Howard Eves. An introduction to the history of mathematics[M]. New York, Philadelphia: CBS College Publishing, 1983. 121-155.
- [4] Courant R, Robbins H. 数学是什么[M]. 汪浩, 朱煜民, 译. 长沙: 湖南教育出版社, 1985. 1-5, 78-83, 312-315.
- [5] 鲍尔加夫斯基. 数学简史[M]. 潘德松, 沈金钊, 译. 上海: 知识出版社, 1984. 55-67.
- [6] Bell E. 数学精英[M]. 徐源, 译. 北京: 商务印书馆, 1991. 19-37.
- [7] Garding L. 数学概观[M]. 胡作玄, 译. 北京: 科学出版社, 1984. 160-168.
- [8] 王乃信. 微积分[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. 5-8, 335-337.

On Archimedeian mathematical thought

WANG Nai-xin, WU Yang-hui

(College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: According to Archimede's contribution for mathematics, especially according to Archimede's methods to find the area of a parabolic arch, this article analysed the Archimedeian mathematical thought, considered that Archimedes was adept at making not only the ingenious physical deduction, but also the strict mathematical deduction. Archimedeian mathematical thought gives us the inspiration: the ingenious physical deduction is the important method of the scientific discovery; the strict mathematical deduction is the necessary step to confirm the result; the several basic principles to be selected act as foundation of deduction; devote oneself to the scientific truth and do not seek secular profit.

Key words: Archimedes; parabolic arch; physical deduction; mathematical deduction