第30卷 第1期 西北农林科技大学学报(自然科学版) Vol. 30 No. 1
2002年2月 Jour. of Northwest Sci-Tech Univ. of Agri. and For. (Nat. Sci. Ed.) Feb. 2002

用线性算子刻画迭代内插空间*

张三敖[1], **盛宝怀**[2]

(1 宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007; 2 宁波大学 数学研究所, 浙江 宁波 315211)

[**摘　要**] 用K方法构造迭代内插空间, 并用线性算子对其逼近性质进行刻画。其结果可以应用到许多具体线性算子上去。

[**关键词**] 内插空间; 线性算子; Besov 空间

[**中图分类号**] O175　　[**文献标识码**] A　　[**文章编号**]1000-2782(2002)01-0128-06

令(A_0,A_1)为1对空间偶, $(A_0,A_1)^K_{\theta,q}=(A_0,A_1)_{\theta,q}$ $(0<\theta<1, 1\le q\le\infty)$, 对$a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$其范数可以定为[1]:

$$\|a\|_{\theta,q}=\left(\int^{\infty}(t^{-\theta}K(t,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, 1\le q\le+\infty,$$

$$\|a\|_{\theta,\infty}=\sup_t t^{-\theta}K(t,a),$$

这里

$$K(t,a)=\inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}).$$

如果$A_1\subset A_0$, 则由文献[1]知道

$$\|a\|_{\theta,q,k}\sim\|a\|_{A_0}+\left(\int^{K}(t^{-\theta}K(t,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

这里K满足$\|a\|_{A_0}\le K\|a\|_{A_1}$, 不失一般性可设$K=1$。

文献[2～4]用线性算子对$(A_0,A_1)^K_{\theta,q}$ $(0<\theta<1, 1\le q\le+\infty)$的特征进行了刻画, 设$(A_0,A_1)$为Banach偶, 则存在无穷多个关于$A_0,A_1$的内插空间, 这里笔者讨论内插空间的迭代构造, 并用算子对其特征进行刻画。

设(A_0,A_1)为Banach偶, 且$A_1\subset A_0$, 则由A_0, A_1构造的中空间$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}=(A_0,A_1)_{\theta_0,q_0}$ $(0<\theta_0<1, 1\le q_0\le\infty)$具有下列性质:

$$A_1=A_0\cap A_1\subset(A_0,A_1)_{\theta_0,q_0}\subset A_0+A_1=A_0.$$

这时可以重复构造空间$(A_0,B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1})_{\theta_1,q_1}$ $(0<\theta_1<1, 0\le q_1\le q_0)$, θ_1可与θ_0不同, q_1可与q_0不同, 令$B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}=(A_0,B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1})_{\theta_1,q_1}$, 则有

$$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\subset B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}\subset A_0.$$

如果令$T\in\mathbf{B}(A_i\to A_i,C)$ $(i=0,1)$, $M_i=\|T\|_{A_i\to A_i}$ $(i=0,1)$, 则有$T\in\mathbf{B}(B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1},C)$且

$$\|T\|_{B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_1,q_0}_{A_0,A_1}}\le M_0^{1-\theta_0}M_1^{\theta_0},$$

因而继续有$T\in\mathbf{B}(B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1},C)$且

$$\|T\|_{B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}}\le$$

$$\|T\|^{1-\theta_1}_{A_0\to A_1}\|T\|^{\theta}_{B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}}=M_0^{1-\theta_0\theta_1}M_1^{\theta_0\theta_1}.$$

这一工作可以继续下去, 对$B^{\theta_{m-2},q_{m-2}}_{A_0,A_1}\subset B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}\subset A_0$有

$$\|T\|_{B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}}\le M_0^{1-\theta_0\theta_1\cdots\theta_{m-1}}M_1^{\theta_0\theta_1\cdots\theta_{m-1}}.$$

可以构造A_0与$B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}$的中间空间$B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}=(A_0,B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1})_{Q_m,q_m}$ $(0<\theta_m\le1, 1\le q_m\le\infty)$, 且有$T\in\mathbf{B}(B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1},C)$及

$$\|T\|_{B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}}\le M_0^{1-\theta_0\theta_1\cdots\theta_m}M_1^{\theta_0\theta_1\cdots\theta_m}$$

和　$$B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}\subset B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\subset A_0.$$

这样便找到一列内插空间$\{B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\}^{\infty}_{m=1}$而使

$$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\subset B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}\subset\cdots\subset B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}\subset B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\subset\cdots\subset A_0,$$

且范数

$$\lim_{\theta_0\theta_1\cdots\theta_m\to0}\|T\|_{B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}}=M_0=\|T\|_{A_0\to A_0}.$$

这样由$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}$向$A_0$方向的构造法称为正构造, 同理, 由$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}$向$A_1$方向构造中间空间可以找到一列中间空间$\{B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\}^{\infty}_{m=0}$而使

$$B^{\theta_0,q_0}_{A_0,A_1}\supset B^{\theta_1,q_1}_{A_0,A_1}\supset\cdots\supset B^{\theta_{-(m-1)},q_{-(m-1)}}_{A_0,A_1}\supset B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}\supset\cdots\supset A_1,$$

且有

$$\|T\|_{B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}}\le$$

* [收稿日期] 2001-05-09
[基金项目] 陕西省教育厅专项科研基金项目(00JK110)
[作者简介] 张三敖(1952-), 男, 陕西宝鸡人, 副教授, 主要从事算子内插研究。

$M^{(1-\theta_0)(1-\theta_1)\cdots(1-\theta_m)}M^{1-(1-\theta_0)(1-\theta_{-1})\cdots(1-\theta_{-m})}$。

因而

$$\lim_{(1-\theta_0)(1-\theta_{-1})\cdots(1-\theta_{-m})\to 0}\|T\|_{B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}\to B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}}=M_1=\|T\|_{A_1\to A_1}。$$

这种向 A_1 方向的构造法称为负构造。

由 K 方法的定义有

$$B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}=\{a:(\int^{\infty}(t^{-\theta_m}K_m(t,a))^{q_m}\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q_m}}<+\infty\},$$

而

$$K_m(t,a)=\inf_{a_1\in B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}}(\|a-a_1\|_{A_0}+t\|a_1\|_{B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}}),$$

且对 $a\in B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}$ 范数为

$$\|a\|_{B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}}=(\int^{\infty}(t^{-\theta_m}K_m(t,a))^{q_m}\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q_m}},$$

而

$$B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}=\{a:(\int^{\infty}(t^{-\theta_{-m}}K_{-m}(t,a))^{q_{-m}}\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q_{-m}}}<+\infty\},$$

这里

$$K_{-m}(t,a)=\inf_{a_1\in A_1}(\|a-a_1\|_{B^{\theta_{-(m-1)},q_{-(m-1)}}_{A_0,A_1}}+t\|a_1\|_{A_1})。$$

对 $\alpha\in B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}$ 范数为

$$\|a\|_{B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}}=(\int^{\infty}(t^{-\theta_{-m}}K_{-m}(t,a))^{q_{-m}}\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q_{-m}}}。$$

文献[1]中所讨论的内插空间 $(B^{\theta}_{p,q},D)$ 便为这里负构造中 $A_1=D$, $A_0=L_p$, 在 $\theta_0=\theta$, $q_0=q$ 及 $\theta_{-1}=s$, $q_{-1}=q$ 的情形。

下面对由 Devore R A 及 Xiangming Yu 引入的一种内插空间[5]进行分析。

设 $g\in L_{p[a,b]}$ 如果满足条件: 对 $0<\alpha<r$, 及 $1\le p,q\le\infty$ 有

$$(\int[t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_p]^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}<+\infty\ (1<q<+\infty),$$

及

$$\sup_{t\le 0}t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_p<+\infty\qquad(q=\infty)。$$

则记 $g\in B^{\alpha}_q(L_p)$, 在 $g\in B^{\alpha}_q(L_p)$ 可赋予范数:

$$\|g\|_{B^{\alpha}_q(L_p)}=\|g\|_{L_p}+\|g\|_{B^{\alpha}_q(L_p)},$$

这里

$$|g|_{B^{\alpha}_q(L_p)}=\begin{cases}(\int^{\infty}[t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_p]^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty\\ \sup_{t\le 0}t^{-\alpha}\omega_r(g;t), & q=\infty,\end{cases}$$

对应的 K 泛函为

$$K(f:t^{\alpha},L_p,B^{\alpha}_q(L_p))=\inf_{g\in B^{\alpha}_q(L_p)}(\|f-g\|_p+t^{\alpha}\|g\|_{B^{\alpha}_q(L_p)}),$$

内插空间为 $(L_p,B^{\alpha}_q(L_p))_{\theta,s}=B^{\theta s}_{\theta}(L_p)$。

令 Sobolev 空间 $W^r_p=\{g(x);g^{(r-1)}(x)$ 绝对连续且 $g^{(r)}\in L_{p[0,1]}\}$ 并赋予范数

$$\|g\|_{\omega^r_p}=\|g\|_p+\|g^{(r)}\|_p,$$

和 K 泛函

$$K(f;t^r,L_p,W^r_p)=\inf_{g\in\omega^r_p}(\|f-g\|_p+t^r\|g\|_{\omega^r_p})。$$

则有等价关系[6]

$$K(f;t^r,L_p,W^r_p)\sim\omega(f;t)_p。$$

因而, 由前面所讨论知道, 这时

$$(L_p,W^r_p)_{\theta,q}=B^{\theta r}_q(L_p)。$$

因而, Besov 空间 $(L_p,B^{\theta}_q(L_p))_{\theta,s}$ 为上面迭代正向构造的第一级构造。

定理 1　设空间偶 (A_0,A_1) 及线性算子到 $L_n\in\mathbf{B}(A_i\to A_i,C)$ $(i=0,1)$, $A_1\subset A_0$, $L_n\in\mathbf{B}(A_0\to A_1,C)$ 且对 $0<\alpha$ 有

$$(1)\ \|L_n(a)\|_{A_0}\le M\|a\|_{A_0},\ a\in A_0,\tag{1}$$

$$(2)\ \|L_n(a)\|_{A_1}\le Mn^{a}\|a\|_{A_0},\ a\in A_0,\tag{2}$$

$$(3)\ \|L_n(a_1)\|_{A_1}\le M\|a_1\|_{A_1},\ a_1\in A_1,\tag{3}$$

$$(4)\ \|L_n(a_1)-a_1\|_{A_0}\le Mn^{-a}\|a_1\|_{A_1},\ a\in A_1,\tag{4}$$

此处 M 表示常数。当 $a\in A_0$ 时, 对 $1\le q\le+\infty$, $0<\theta<\alpha$ 有

$$\|a\|_{A_0}+(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta}\|L_n(a)-a\|_{A_0})^q\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}\sim(\int(t^{-\theta}K(t^{\alpha},a))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}+\|a\|_{A_0},\tag{5}$$

且当 $q=\infty$ 时, 对 $a\in A_0$ $(0<\theta<\alpha)$ 有

$$\|L_n(a)-a\|=O(n^{-\theta})\Leftrightarrow K(t^a,a)=O(t^{\theta})。$$

这里 K 泛函 $K(t,a)$ 为

$$K(t^a,a)=\inf_{a_i\in A_i}(\|a-a_1\|_{A_0}+t^a\|a_1\|_{A_1})。$$

证明: 先证明充分性, 对任意 $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$ 有

$$\begin{aligned}&\|L_n(a)-a\|_{A_0}\le\|L_n(a-a_1)\|_{A_0}+\\&\|L_n(a_1)-a_1\|_{A_0}+\|a-a_1\|_{A_0}\le\\&(M+1)\|a-a_1\|_{A_0}+Mn^{-a}\|a_1\|_{A_1}\le\\&(M+1)\|a-a_1\|_{A_0}+n^{-a}\|a_1\|_{A_1},\end{aligned}$$

两边对 a_1 取 inf 有

$$\|L_n(a)-a\|_{A_0}\le(M+1)K(n^{-a},a)。$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta}\|L_n(a)-a\|_{A_0})^q\frac{1}{n}=\\&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}(n^{\theta}\|L_n(a)-a\|_{A_0})\frac{1}{n}\le\\&\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}(2^{(k+1)\theta}(M+1)K(2^{-ak},a))^q\le\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((M+1)2^{1+\theta})^q}{\ln 2}\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}(t^{-\theta}K(t^{\theta},a))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\le$$

$$M_1\int_0^1(t^{-\theta}K(t^{a},a))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}。$$

对 $a\in A_0$ 有

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}(n^{\theta}\|L_n(a)-a\|_{A_0})^q\frac{1}{n}\}^{\frac{1}{q}}+\|a\|_{A_0}\le$$

$$M_2\{\int_0^1(t^{-\theta}K(t^{a},a))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\}^{\frac{1}{q}}+\|a\|_{A_0}。$$

下面证明另一个方面,由假设,对 $a\in A_0$ 及 $a_1\in A_1$ 有

$$\begin{aligned}&\|L_n(a)-a\|_{A_1}\le\\&\|L_n(a)-L_n(a_1)\|_{A_1}+\|L_n(a_1)\|_{A_1}\le\\&\|L_n(a-a_1)\|_{A_1}+\|L_n(a_1)\|_{A_1}\le\\&M\,n^{a}\|a-a_1\|_{A_1}+M\|a_1\|_{A_1}\le\\&M\,n^{a}\|a-a_1\|_{A_1}+n^{-a}\|a_1\|_{A_1},\end{aligned}$$

因此有

$$\|L_n(a)\|_{A_1}\le M\,n^{a}K(n^{-a},a)。\tag{6}$$

取 r 为正数(待定),由 K 泛函的性质得

$$I=\int_0^1[t^{-\theta}K(t^{a},a)]^q\frac{\mathrm{d}t}{t}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{r^{-k-1}}^{r^{-k}}[t^{-\theta}K(t^{a},a)]^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\le$$

$$r^{-\theta q}\ln r\sum_{k=1}^{\infty}[r^{k\theta}K(r^{-ka},a)]^q$$

对于正整数,取 n_k 使

$$r^k\le n_k\le r^{k+1},$$

且

$$\|L_{n_k}(a)-a\|_{A_0}=\min_{r^k\le n_k\le r^{k+1}}\|L_n(a)-a\|_{A_0}。$$

则由 K 泛函的定义有

$$\begin{aligned}&K(r^{-ka},a)\le\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0}+r^{-ka}\|L_{n_k}(a)\|_{A_1}\le\\&\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0}+r^{-ka}M\,n^{a}K(n_k^{-a},a)\le\\&\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0}+M(r^{-k}n_k)^{a}\|a-L_{n_{k-1}}(a)\|_{A_0}+\\&M\,r^{-ka}\|L_{n_{k-1}}(a)\|_{A_1}\le\\&\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0}+M(r^{-k}n_k)^{a}\|a-K_{n_{k-1}}(a)\|_{A_0}+\\&M^2(r^{-k}n_{k-1})^{a}K(n_{k-1}^{-a},a)\le\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0}+\\&\sum_{m=0}^{k-1}(r^{-k}n_{k-m})^{a}M^{m+1}\|a-L_{n_{k-m+1}}(a)\|_{A_0}+\\&M^{k+1}(n_0r^{-k})^{a}K(n_0^{-a},a)。\end{aligned}\tag{7}$$

令

$$I_1=\sum_{k=0}^{\infty}(r^{k\theta}\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0})^q,$$

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}(r^{k\theta}\sum_{m=0}^{k-1}(r^{-k}n_{k-m})^{a}M^{m+1}\|a-L_{n_{k-m-1}}(a)\|_{A_0})^q,$$

$$I_3=\sum_{k=0}^{\infty}(r^{k\theta}(r^{-k}n_0)^{a}M^{k+1}K(n_0^{-a},a))^q$$

由凸函数的性质有

$$I\le C(I_1+I_2+I_3)\tag{8}$$

因为 $K(n_0^{-a},a)\le K(1,a)\le C$(常数)因而

$$I_3\le C\sum_{k=0}^{\infty}(r^{\theta-\alpha}M)^{kq}。$$

选择 r 而使 $r^{\theta-\alpha}M<\frac{1}{2}$,如可选 $r>(2M)^{\frac{1}{\theta-\alpha}}$, 则有

$$I_3\le C\sum_{k=0}^{\infty}(r^{\theta-\alpha}M)^{kq}\le C\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{kq}<\infty,$$

$$I_1\le C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=r^k}^{r^{k+1}-1}(r^{k\theta}\|a-L_{n_k}(a)\|_{A_0})^q\frac{1}{n}\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(n^{\theta}\|a-L_n(a)\|_{A_0})^q\frac{1}{n}<+\infty。$$

令 $k-m-1=l$, 则

$$I_2\le C\sum_{k=1}^{\infty}(r^{k\theta}\sum_{l=0}^{k-1}(r^{-k}r^{l+2})^{a}M^{k-l}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k-1}r^{(k-l)\theta}r^{-(k-l)a}r^{l\theta}M^{k-l}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k-1}r^{(k-l)(\theta-a)}M^{k-l}r^{l\theta}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q=$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k-1}(r^{(\theta-a)}M)^{k-l}r^{l\theta}\|a-L_{n_l}\|_{A_0})^q。$$

不失一般性,令 $0<C=\sum_{l=0}^{\infty}(r^{\theta-\alpha}M)^l<+\infty$ 则

$$I_2=C\sum_{k=1}^{\infty}[(\sum_{l=0}^{k-1}(r^{\theta-\alpha}M)^{k-l})\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(r^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}{\sum_{l=0}^{k-1}(r^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}r^{l\theta}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0}]^q\le$$

$$C\sum_{l=0}^{\infty}(\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{(r^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}{\sum_{l=0}^{k-1}(r^{\theta-\alpha}M)^{k-l}}(r^{l\theta}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q\le$$

$$C\sum_{l=0}^{\infty}(r^{l\theta}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q\le$$

$$C\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=r^l}^{r^{l+1}-1}(n^{\theta}\|a-L_{n_l}(a)\|_{A_0})^q\frac{1}{n}\le$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta}\|a-L_n(a)\|_{A_0})^q\frac{1}{n}<+\infty。$$

因此有

$$I\le C\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta}\|a-L_n(a)\|_{A_0})^q\frac{1}{n}。$$

从而(5)得证。

下面证明 $q=\infty$ 时的情形。由(1)-(4),对 $a\in$

A_0 有

$K(t^\alpha, a) \le \|a - L_n(a)\|_{A_0} + t^\alpha \|L_n(a)\|_{A_1} \le$

$\|a - L_n(a)\|_{A_0} + M t^\alpha n^\alpha K(n^{-\alpha}, a)$。

取 $A \in N$ (A 待定), $t = A^{-m-1}$ ($m \in N$) 及 $n \in N$, $n-1 \le A^m < n$, 则有

$K(A^{-\alpha(m+1)}, a) \le M(A^{-m\theta} + A^{-\alpha}K(A^{-\alpha m}, a))$。

这时令 $u_m = A^{m\theta}K(A^{-\alpha m}, a)$, 则

$u_{m+1} = A^{(m+1)\theta}K(A^{-\alpha(m+1)}, a) \le$

$A^{(m+1)\theta} M A^{-m\theta} + A^{\theta-\alpha} M A^{m\theta} K(A^{-\alpha m}, a) =$

$MA^{\theta} + MA^{\theta-\alpha}u_m$

因为 $\theta < \alpha$, 因而选 A 使 $A^{\theta-\alpha} < \frac{1}{M}$, 这时

$u_{m+1} \le \max\{MA^\theta, u_m\} \le \max\{MA^\theta, u_1\}$。

因为 $u_1 = A^\theta K(A^{-\alpha}, a) < +\infty$, 因此 $u_m < +\infty$ 即

$$K(A^{-m\alpha}, a) \le MA^{-m\omega},$$

随即得

$$K(t^\alpha, a) = O(t^\theta)。$$

充分性为显的。因而有(5)式成立。

定理2 以空间偶 (A_0, A_1) 及算子族 $L_\sigma \in \mathbf{B}(A_i \to A_i, C)$ $(i = 0, 1)$, $A_1 \subset A_0$, 且 $L_\sigma \in \mathbf{B}(A_0 \to A_1, C)$ 并有

(1) $\|L_\sigma(a)\|_{A_0} \le M\|a\|_{A_0}, a \in A_0,$ (9)

(2) $\|L_\sigma(a)\|_{A_1} \le M\sigma^a \|a\|_{A_0}, a \in A_0,$ (10)

(3) $\|L_\sigma(a_1)\|_{A_1} \le M\|a_1\|_{A_1}, a_1 \in A_1,$ (11)

(4) $\|L_\sigma(a_1) - a_1\|_{A_0} \le M\sigma^{-a}\|a_1\|_{A_1}, a_1 \in A_1,$ (12)

则当 $1 \le q \le \infty$ 时, 对 $a \in A_0$ 有

$$\left(\int^\infty (\sigma^\theta \|L_a(a) - a\|_{A_0})^q \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0} \sim$$

$$\left(\int (t^{-\theta} K(t^a, a))^q \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0}。 \quad (13)$$

当 $q = \infty$ 时

$\|L_a(a) - a\|_{A_0} = O(\sigma^{-\theta}) \Leftrightarrow K(t^a, a) = O(t^\theta)$。 (14)

证明: 定理2可仿照定理1证明(略)。

定理3 设Banach偶 A_0, A_1 及线性算子 L_n 满足定理1的条件, 则对 $a \in A_0$, 当 $1 \le q_m < +\infty$ 时,

$$a \in B^{\theta_m, q_m}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta_m} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^{q_m} \frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{q_m}} < +\infty。 \quad (15)$$

当 $q_m = +\infty$ 时,

$\|L_n(a) - a\| = O(n^{-\theta_m}) \Leftrightarrow K_m(t^{\alpha\theta_0\theta_1\cdots\theta_{m-1}}, a) = O(t^{-\theta_m})$。

当 $1 \le q_{-m} < +\infty$ 时, 对 $a \in B^{\theta_{-(m-1)}, q_{-(m-1)}}_{A_0, A_1}$,

$a \in B^{\theta_{-m}, q_{-m}}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta_{-m}} \|a - L_n(a)\|_{B^{\theta_{-(m-1)}, q_{-(m-1)}}_{A_0, A_1}})^{q_{-m}}\right]^{\frac{1}{q_{-m}}} < +\infty。 \quad (16)$$

当 $q_{-m} = \infty$ 时, 对 $a \in B^{\theta_{-(m-1)}, q_{-(m-1)}}_{A_0, A_1}$

$\|L_n(a) - a\|_{B^{\theta_{-(m-1)}, q_{-(m-1)}}_{A_0, A_1}} = O(n^{-\theta_{-m}}) \Leftrightarrow$

$K_{-m}(t^{\alpha(1-\theta_0)\cdots(1-\theta_{-(m-1)})}, a) = O(t^{\theta_{-m}})$。

证明: 先证(15)。由定理3的条件知道

$$\|L_n\|_{A_0 \to A_0} \le M, \quad (17)$$

$$\|L_n\|_{A_1 \to A_1} \le M, \quad (18)$$

$$\|L_n\|_{A_0 \to A_1} \le M n^\alpha, \quad (19)$$

对单位算子 I 有

$$\|I - L_n\|_{A_0 \to A_1} \le M n^{-\alpha}。 \quad (20)$$

由(17)、(18)及内插定理[1]知道

$$\|L_n\|_{(A_0, A_1)_{\theta_0, q_0} \to (A_0, A_1)_{\theta_0, q_0}} \le M。 \quad (21)$$

由(17)、(19)及内插定理知道

$$\|L_n\|_{A_0 \to B^{\theta_0, q_0}_{A_0, A_1}} \le M n^{\alpha\theta_0}。 \quad (22)$$

由(17), (20)有

$$\|I - L_n\|_{(A_0, A_1)_{\theta_0, q_0} \to A_0} \le M n^{-\alpha\theta_0}。 \quad (23)$$

由定理1, (17), (21), (22), (23)结合 $B^{\theta_1, q_1}_{A_0, A_1}$ 的定义对 $a \in A_0$ 有

$$a \in B^{\theta_1, q_1}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta_1} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^{q_1} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q_1}} < +\infty,$$

$a \in B^{\theta_1, q_1}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \|a - L_n(a)\|_{A_0} = O(n^{-\theta_1})$。

将上面工作重复进行, 可以 $B^{\theta_1, q_1}_{A_0, A_1}$ 取代 A_1 的位置, 用内插定理则当 $q_2 < +\infty$ 有

$$a \in B^{\theta_2, q_2}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta_2} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^{q_2} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q_2}} < +\infty。$$

当 $q_2 = +\infty$ 时

$a \in B^{\theta_2, q_2}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \|a - L_n(a)\|_{A_0} = O(n^{-\theta_2})$。

对 m 应用数学归纳法, 便有当 $q_m < +\infty$ 时

$$a \in B^{\theta_m, q_m}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\theta_m} \|a - L_n(a)\|_{A_0})^{q_m} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q_m}} < +\infty。$$

当 $q_m = +\infty$ 时

$a \in B^{\theta_m, q_m}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \|a - L_n(a)\|_{A_0} = O(n^{-\theta_m})$。

下面证(16)。由(18)、(20)有

$$\|I - L_n\|_{A_1 \to B^{\theta_0, q_0}_{A_0, A_1}} \le M n^{-\alpha(1-\theta_0)}, \quad (24)$$

由(18)、(21)、(24)及定理1当 $q_{-1} < +\infty$ 时有

$a \in B^{\theta_{-1}, q_{-1}}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ((n^{\theta_{-1}} \|a - L_n(a)\|_{B^{\theta_0, q_0}_{A_0, A_1}})^{q_{-1}}) \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q_{-1}}} < +\infty。$$

当 $q_{-2} = +\infty$ 时

$a \in B^{\theta_{-2}, q_{-2}}_{A_0, A_1} \Leftrightarrow \|a - L_n(a)\|_{B^{\theta_{-1}, q_{-1}}_{A_0, A_1}} = O(n^{-\theta_{-2}})$。

对 m 应用数学归纳法, 便可证明(16)。

定理 4 设 Banach 空间偶 A_0, A_1 及线性算子 L_σ 满足定理 2 的条件, 则对 $a\in A_0$ $(0<\theta_m<1)$ 当 $1\le q_m<+\infty$ 时

$$a\in B^{\theta_m,q_m}_{A_0,A_1}\Leftrightarrow\left(\int^{\infty}(\sigma^{\theta_m}\|a-L_\sigma(a)\|_{A_0})^{q_m}\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q_m}}<+\infty。$$

当 $q_m=+\infty$ 时, 对 $a\in A_0$

$$\|a-L_\sigma(a)\|_{A_0}=O(n^{-\theta_m})\Leftrightarrow K_m(t^{\alpha\theta_0\theta_1\cdots\theta_{m-1}},a)=O(t^{-\theta_m})。$$

当 $1\le q_m<+\infty$ 时, 对 $a\in B^{\theta_{m-1},q_{m-1}}_{A_0,A_1}$,

$$a\in B^{\theta_{-m},q_{-m}}_{A_0,A_1}\Leftrightarrow$$

$$\left(\int((\sigma^{\theta_{-m}}\|a-L_\sigma(a)\|_{B^{\theta_{-(m-1)},q_{-(m-1)}}_{A_0,A_1}})^{q_{-m}})^{q_{-m}}\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q_{-m}}}<+\infty。$$

当 $q_{-m}=\infty$ 时, 对 $a\in B^{\theta_{-(m-1)},q_{-(m-1)}}_{A_0,A_1}$

$$\|L_\sigma(a)-a\|_{B^{\theta_{-(m-1)},q_{-(m-1)}}_{A_0,A_1}}=O(n^{-\theta_{-m}})\Leftrightarrow$$
$$K_m(t^{\alpha(1-\theta_0)\cdots(1-\theta_{-(m-1)})},a)=O(n^{-\theta_m})。$$

此定理可用定理 3 的办法借助定理 2 证明。

定理 3 和定理 4 不是简单的推广, 而具有重要的应用价值。应用这些结果可以对几乎所有目前所见到的有界正线性算子(如各种积分型 Bernstein 及 Meyer-Konig and Zeller 算子)的逼近特征重新进行刻画, 如对 Bernstein-Durrmeyer 算子

$$H^*_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}b_{nk}(x)\int f(u)b_{nk}(u)\mathrm{d}u。$$

令 $A_0=L^p_\omega$, $A_1=D=\{g(x):\omega(x)g(x),\ \omega(x)\varphi(x)g''(x)\in L_p\}$, 并定义 K 泛函

$$K(t,f)_{p,\omega}=\inf_{g\in D}\{\|\omega(f-g)\|_p+t\|g\|_D\},$$

由定理 3 有下述结果:

定理 5 对 $0<\theta<1$, $0<\theta_1<1$, $1\le q<+\infty$, $1\le q_1<+\infty$ 及 $f\in L_p$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta_1}\|(H^*_n(f)-f)\omega\|_p)^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}<+\infty$$

的充要条件为

$$\left(\int^{\infty}(t^{-\theta_1}K^*(t^{\theta},t)_{p,\omega})^{q_1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}<+\infty。$$

当 $q_1=\infty$ 时, 对 $f\in L_p$ 有

$$\|(H^*_n(f)-f)\omega\|_p=O(n^{-\theta_1})\Leftrightarrow K^*(t^{\theta},f)_{p,\omega}=O(t^{\theta_1}),$$

这里

$$K^*(t,f)_{p,\omega}=\inf_{g\in D^*}(\|\omega(f-g)\|_p+t\|g\|_{D^*}),$$

而 $D^*=\{g(x):\omega(x)g(x)\in L_p$ 且对 $1\le q<+\infty$ 有 $\left(\int^{\infty}(t^{-\theta}K(t,g)_{p,\omega})^{q}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty$ 对 $q=+\infty$ 有 $\sup_{t\ge0}t^{-\theta}K(t,g)_{p,\omega}<+\infty\}$ 和

$$\|g\|_{D^*}=\|\omega g\|_p+\begin{cases}\left(\int^{\infty}(t^{-\theta}K(t,g)_{p,\omega})^{q}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}},\\ \sup_{t\ge0}t^{-\theta}K(t,g)_{p,\omega}。\end{cases}$$

注意到如下等价关系[6]

$$K(t,f)_{p,\omega}\sim\omega^2_{\varphi}(f,t)_{p,\omega},$$

及

$$\omega^2_{\varphi}(f,t)_{p,\omega}=\sup_{0<h\le t}\|\omega\Delta^2_{h\varphi}f(x)\|_p。$$

因而当 $q_1=\infty$ 时, 作为一个简单情形便有

$$\|\omega(H^*_n(f)-f)\|_p=O(n^{-\theta})$$

的充要条件为

$$K^*(t^{\theta},f)_{p,\omega}=O(t^{\theta_1})。$$

显然 K 泛函 $K^*(t,f)_{p,\omega}$ 与 K 泛函 $K(t,f)_{p,\omega}$ 为不同的 K 泛函。

由此给出了构造新的 K 泛函来刻画算子逼近的方法。

下面给出定理 4 的应用, 用 B^{σ}_p 代表 $L_{p(R)}$ 中指数 $\sigma>0$ 的整函数而构成的线性空间, 作算子

$$I_n(f,x)=-\int\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j f(x-jt)k_\sigma(t)\mathrm{d}t,$$

其中

$$k_\sigma(x)=\frac{1}{\lambda_\sigma}\left(\frac{\sin\sigma_1x}{\sigma_1x}\right)^{2\sigma},$$

$\sigma_1=\dfrac{\sigma}{(2s+2)}$, $s\in N$, 及 $\lambda_\sigma>0$ 满足 $\int k_\sigma I(x)\mathrm{d}x=1$, 则 $T_\sigma(f,x)$ 为指数 $l=\dfrac{s\sigma}{s+1}$ 的整函数。

令 r 为自然数 $t>0$, 对 $f(x)\in L_{p(R)}$ 我们定义 r 阶积分模

$$\omega_r(f;t)_{p(R)}=\sup_{0\le h\le l}\|\Delta^h_p(f;x)\|_{p(R)},$$

其中

$$\Delta^k_r(f;x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}f(x-jh)。$$

令 $Lip^*\alpha=\{g(x)\,|\,\omega_r(g;t)_p=O(t^{\alpha}),\ 0<\alpha<r\}$, 对 $f\in Lip^*\alpha$ 赋予范数

$$\|g\|_{Lip^*\alpha}=\|g\|_p+\sup_{t\ge0}t^{-\alpha}\omega_r(g,t)。$$

则应用关于整函数的 Bernstein 不等式易证

$\|I_\sigma(f)\|_p\le M\|f\|_p$, 对 $f\in L_{p(R)}$,

$\|I_\sigma(g)-g\|_p\le M\omega_r(g;\frac{1}{\upsilon})\le M\sigma^{\alpha}\|a\|_{Lip^*\alpha}$, $g\in Lip^*\alpha$,

$\|I_\sigma(f)\|_{Lip^*\alpha}\le M\sigma^{\alpha}\|f\|_{P(R)}$, $f\in L_{p(R)}$,

$\|I_\sigma(g)\|_{Lip^*\alpha}\le M\|g\|_{Lip^*\alpha}$, $g\in Lip^*\alpha$

作 K 泛函

$$K^*_p(f,t)=\inf_{g\in Lip^*\alpha}(\|f-g\|_p+t\|g\|_{Lip^*\alpha}),$$

及内插空间

$$(L_{p(R)},Lip^*\alpha)_{\theta,q}=B^{\theta\alpha}_q(L_{p(R)}),$$

并在 $B^{\theta\alpha}_q(L_{p(R)})$ 上赋予半范数

$$|G|_{B^{\theta\alpha}_q(L_{p(R)})}=\begin{cases}\left(\int^{\infty}[t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_p]^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty,\\ \sup_{t\ge0}t^{-\alpha}\omega_r(g;t)_{p},\ q=\infty,\end{cases}$$

及 K 泛函

$$K_p^*(f,t)=\inf_{g\in B_p^{\theta,\alpha}(L_{p(R)})}(\|f-g\|_p+|g|_{B_q^{\theta,\alpha}(L_{p(R)})})。$$

则有下述结果:

定理 6　对 $0<\theta,\theta_1<1$, $0\le q\le+\infty$, $0\le q_1<+\infty$ 及 $f\in L_{p(R)}$ 有

$$\left(\int^{\infty}(\sigma^{\theta_1}\|I_\sigma(f)-f\|_p)^{q_1}\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q_1}}<+\infty\Leftrightarrow$$

$$\left(\int^{\infty}(t^{-\theta_1}K_p^*(t^{\theta}))^{q_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}<+\infty$$

且对 $q_1=+\infty$ 及 $f\in L_{p(R)}$ 有

$$\|I_\sigma(f)-f\|_p=O(\sigma^{-\theta_1})\Leftrightarrow K_p^*(f,t^{\theta})=O(t^{\theta_1})。$$

[参考文献]

[1] Bergh J, Lofsrom J. Interpolation spaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, World Publishing Corp, 1976.

[2] LI Song. The equivalence relations between the best approximation and linearoperators approximation in a Besov spaces[J]. Acta Math Sinica New Series, 1997, 13(4): 527-536.

[3] 张南松, 周定轩. Besov 空间中 Jackson 算子的正逆定理[J]. 应用数学学报, 1994, 17(3): 355-363.

[4] 柯云泉. 关于 Szasz-Mirakjan-Durrmeyer 算子在 Besov 空间上的逼近阶[J]. 数学研究, 1995, 28(4): 87-90.

[5] Devore R A, YU Xiang-ming. K-functional for Besov spaces[J]. J of Approx Theory, 1991, 67: 38-51.

[6] Ditzian Z, Totik V. Moduli of Smoothness[M]. New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1989.

[7] 周信龙. 关于 Bernstein-Kantorovich 多项式在 $L_{p[0,1]}$ 空间中的逼近阶[J]. 数学进展, 1985, 14(2): 385-394.

[8] 李　松. 在 $L_{p(s)}$ 空间中多元的 Bernstein-Kantorovich 算子的逼近性质[J]. 应用数学学报, 1996, 19(3): 385-394.

[9] Kopotun K. A note on simultaneous approximation in $L_{p[-1,1]}(1\le p<\infty)$[J]. Aanl, 1995, 15: 151-158.

[10] Ditzian Z, Hristor V H, Ivanov K G. Moduli of smoothess and K-functional in $L_p(0<p<1)$[J]. Const Approx, 1995, 11: 67-83.

[11] LI Song. The equivalence relation between the Ditaian-Totik moduli of smoothness and best polynomial approximation in the Besov spaces[J]. J of Math and Appl, 1997, 215: 1-14.

[12] ZHANG Zhen-qiu. On weighted approximation by Bernstein-Durrmeyer operators[J]. Approx Theory & its Appli, 1991, 7(2): 51-64.

On approximation by linear operators in reiteration interpolation spaces

ZHANG San-ao[1], **SHENG Bao-huai**[2]

(1 *Department of Maths, Baoji College of Arts and Sciences, Baoji, Shaanxi* 721007, *China*; 2 *Institute of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang* 315211, *China*)

Abstract: Reiteration interpolation space is constructed with K-method, and their properties of approximation is descripted with lincar operators.

Key words: interpolation space; linear operators; Besov spaces