

混凝土非线性本构模型的构建

袁志芬, 王正中, 赵斌

(西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘要] 通过分析各种常用的材料强度破坏准则, 建议了一种适合混凝土非线性特性的破坏准则; 采用了非线性指标 β_t, β_c 区别对待材料的不同拉、压状态; 引用了 Sargin 的一维应力应变关系。结合以上 3 个方面, 提出了一个较为合理恰当的混凝土非线性本构模型, 便于有限元的实施。

[关键词] 混凝土强度准则; 非线性指标; 本构模型

[中图分类号] TU311.4

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-2782(2001)03-111-04

结构分析是工程结构设计的关键环节, 尤其对于有重大社会意义和经济价值的结构, 需要进行结构试验及非线性有限元动静力分析, 而其前提条件就是建立合理准确的本构关系。目前在混凝土结构分析中采用的非线性破坏准则多种多样, 形式复杂, 而且非线性指标的计算尚不能完全正确地表示结构的实际应力状态, 各家公式^[1~3]很难在破坏准则、非线性指标和等效一维应力应变关系方面达到准确、简捷、通用的目标。为此, 本研究在分析前人提出的各种模型的基础上, 提出了一种新的非线性本构模式, 以供结构分析工作参考。

1 破坏准则的选定

破坏准则指材料在怎样的极限状态下达到破坏。对于混凝土来说, 一般指极限强度。因单轴强度不能反映混凝土破坏的普遍情况, 通常需用空间坐标的破坏曲面来描述其破坏, 混凝土的破坏准则也就是混凝土空间坐标破坏曲面的规律。这个准则一般以应力状态或应力状态不变量表达。混凝土破坏准则多种多样, 形式简单的古典强度理论准则^[4~7]因不能反映混凝土破坏包络面的主要几何特性而渐被淘汰, 随着试验研究的开展和试验数据的积累, 各种能比较准确地描述混凝土破坏曲面的准则应运而生, 一些有代表性的非线性准则有: Ottosen 准则^[8,9], Kotsovos 准则^[10,11], Podgorski 准则^[10,12], 我国学者过镇海建议的五参数幂函数破坏准则^[13~14]以及清华大学江见鲸教授提出的四参数准则^[2,3]。

Ottosen 准则的优点是在一般三轴受压、三轴

拉压、二轴应力状态下偏平面包络线与试验结果规律一致, 但压、拉子午线在较高静水压力时的计算强度偏高, 特别是拉子午线的误差更大。

Kotsovos 准则采用幂函数, 形式较简单, 偏平面采用椭圆组合曲线, 整个破坏面光滑外凸。主要问题是拉、压子午线强度比值 τ_{ctu}/τ_{ctc} 变化过大, 在静水压力较高时理论计算强度已偏高, 尤其是拉子午线计算误差更大, 表现在图上为子午线开口较大。

Podgorski 准则子午线和偏平面包络线都与 Ottosen 准则接近, 且与试验结果符合程度较好, 但在高静水压力时计算强度值偏高。另外, 取二轴等压强度 $f_{cc} = 1.1f_c$, 比一般试验值低。

过镇海提出的强度准则建立在较多的国内外试验结果的基础上, 在各种应力状态下理论曲线都处于其他各准则变化范围内, 有适应较宽应力比和较广八面体应力范围的特点, 且计算强度适中。但是, 准则参数的确定需通过大量试验结果拟合并进行试算或迭代, 计算麻烦, 而且混凝土的单轴抗拉强度对准则参数值的变化也比较敏感。

Ottosen 准则在参数标定及非线性指标求解上很不方便, 因此, 清华大学江见鲸教授与其研究生合作, 改进了 Ottosen 公式, 建议了四参数准则^[13,14]:

$$a \frac{J_2}{f_c^2} + (b + c \cos \theta) \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + d \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0. \quad (1)$$

江见鲸的四参数准则破坏包络面符合混凝土破坏包络面的几何特征, 结果与 Ottosen 准则非常接近, 且参数的标定是通过 4 组强度特征数据 $f_c, f_t,$

[收稿日期] 2000-11-29

[作者简介] 袁志芬(1975—), 女, 甘肃武威人, 在读硕士, 主要从事水工建筑物的研究。

$f_{cc}(f_c = 1.2f_c)$ 和 $f_{cc}(\theta = 60^\circ, I_1/f_c = -5\sqrt{3}, \sqrt{J_2}/f_c = 2\sqrt{2})$ 确定, 比过镇海的迭代法方便。该准则的缺点是在 $\theta = 60^\circ$ 处, 偏平面上的曲线有一尖点, 不光滑, 但在实际应用中无大影响。因此, 从强度准则表达的准确程度、工程实用与简便的角度考虑, 建议采用江见鲸的四参数准则。

2 非线性指标的选定

非线性指标 β 指材料实际应力与破坏时的应力比值, 它描述了应力状态的相对水平。许多学者^[1,2,9,15,16]都对 β 进行了研究并提出了不同的表达方法。

Ottosen 模型^[9]中定义了一个非线性指标 $\beta = \sigma_3/\sigma_{3f}$ 。它是在保持 σ_1 与 σ_2 不变的情况下, 增大 σ_3 至 σ_{3f} 破坏时的破坏程度, 而在实际中要保持 σ_1 与 σ_2 不变而增大 σ_3 其可能性很小, 而且该法计算 σ_{3f} 时需靠迭代, 比较麻烦。

江见鲸^[2]建议用 $\beta = \sqrt{J_2}/\sqrt{J_{2f}}$, 通常不迭代就可求出 $\sqrt{J_{2f}}$, 且 β 物理意义明确。但它还存在缺陷, 如当前应力由 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 发展到 $(\sigma_{1f}, \sigma_{2f}, \sigma_{3f})$ 时, 因 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{1f} + \sigma_{2f} + \sigma_{3f}$, 且 $|\sigma_3| \leq |\sigma_{3f}|$, 三轴受压时则有 $|\sigma_{1f} + \sigma_{2f}| < |\sigma_1 + \sigma_2|$ 。即第三主应力大于当前主应力, 但第一、第二主应力小于当前主应力, 这种定义不能真实反映当前应力状态。为此过镇海^[1]将应力水平指标 β 定义为

$$\beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_{1f}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{2f}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}}, \quad (2)$$

$$\text{或} \quad \beta = \frac{\tau_{oct}}{\tau_{octf}} = \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{octf}}. \quad (3)$$

式中, τ_{oct}, σ_{oct} 分别为当前应力状态 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 时的八面体剪应力和八面体正应力; $\tau_{octf}, \sigma_{octf}$ 分别为破坏应力状态 $(\sigma_{1f}, \sigma_{2f}, \sigma_{3f})$ 时的八面体剪应力和八面体正应力。这一定义 β 可较好地反映三轴受压应力状态下塑性应变的发展情况, 其缺点是在三轴拉、压应力

状态下, 该式无法表示受拉与受压方向不同的塑性变形情况。

本文根据一些试验资料^[15], 建议将拉、压指标区分开来, 分别用 β_t, β_c 表示受拉、受压方向的不同塑性发展情况。

根据混凝土的受力特性, 以 α 表示混凝土的受

$$\text{拉应力指标, } \alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i \delta_i)^2 / \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2},$$

$$\text{式中, } \delta_i = \begin{cases} 0, & (\sigma_i \leq 0) \\ 1, & (\sigma_i > 0) \end{cases} \quad (i=1, 2, 3).$$

即拉应力在总应力中所占的比例。当 $\alpha=0$ 时, 混凝土处于纯压状态, $\beta_c = \beta$, 则 $\beta_t = 0$; 当 $\alpha \geq \alpha_t$ 时, 混凝土的破坏主要取决于最大拉应力, 压应力的影响相对减弱, 破坏形态为拉断破坏, 受拉方向的应力应变曲线与单轴受拉应力应变曲线相似, 故可用 β 值去衡量拉应力方向的变形规律, 即 $\beta_t = \beta$ 。而在受压方向因应力较小, 变形近似直线变化, 这样受压方向的非线性指标可表示为

$$\beta_c = \frac{\text{当前压应力}}{\text{单轴受压强度}}.$$

为了避免在二压一拉时出现 2 个 β_c 值, 此处定义一个平均压应力 σ_{ave} ,

$$\sigma_{ave} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^2 \delta_i) / \sum_{i=1}^3 \delta_i}, \quad \delta_i = \begin{cases} 1, & \sigma_i < 0, \\ 0, & \sigma_i \geq 0, \end{cases} \quad (i=1, 2, 3).$$

β_c 取为 $\beta_c = \frac{\sigma_{ave}}{f_c}$; 当 $0 < \alpha < \alpha_t$ 时, 混凝土的破坏主要取决于压应力的影响, 拉应力影响相对减弱。破坏时, 受拉和受压方向都有一定的塑性变形, 受拉方向仍按 $\beta_t = \beta$ 计算, 受压方向按 $\alpha=0$ 及 $\alpha \geq \alpha_t$ 的情况进行线性插值取为 $\beta_c = \beta \frac{\alpha_t - \alpha}{\alpha_t} + \frac{\sigma_{ave}}{f_c} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_t}$; 当 $\alpha=1$ 时, 混凝土为纯拉状态, β 就表示受拉方向的非线性指标, 则 $\beta_c = 0, \beta_t = \beta$ 。

综上所述, 得出三向拉压应力状态下的非线性指标取值(表 1)。

表 1 三向应力状态下的混凝土非线性指标

Table 1 Nonlinear stress level parameter of concrete under complex stress state

α 取值	受拉非线性指标 β_t Compressed β_t	受压非线性指标 β_c Tensile β_c	α 取值	受拉非线性指标 β_t Compressed β_t	受压非线性指标 β_c Tensile β_c
0	0	β	$(\alpha_t, 1)$	β	$\frac{\sigma_{ave}}{f_c}$
$(0, \alpha_t)$	β	$\beta \frac{\alpha_t - \alpha}{\alpha_t} + \frac{\sigma_{ave}}{f_c} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_t}$	1	β	0

注: ① $\beta = \frac{\tau_{oct}}{\tau_{octf}} = \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{octf}}$; ② α_t 为临界拉应力指标, $\alpha_t = 0.05 \sim 0.09$ 。

Note: ① $\beta = \frac{\tau_{oct}}{\tau_{octf}} = \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{octf}}$; ② α_t is the limit of tensile stress, $\alpha_t = 0.05 \sim 0.09$ 。

3 等效单轴应力应变关系

构建混凝土本构关系关键是确定材料常数随应力状态变化的规律。由于多轴应力下的强度试验很难做,甚至不大可能,而单轴试验方便,得到的 $\sigma-\epsilon$ 关系也很多,故可将一维的 $\sigma-\epsilon$ 关系推广到复杂应力状态中去。

3.1 一维应力应变关系

对于混凝土来说其主要力学性能是拉压性能,故此处暂不考虑其抗剪性能。混凝土的一维拉压应力应变关系可由各种类型的方程式来表达,如多项式、三角函数、指数函数和有理分式等^[17]。常见的有用一个方程式来表达全曲线的 Sargin 式^[18]、Saenz 式^[1]、Murray 式^[3]以及我国清华大学建议的两段式^[1]。Saenz 式只适用于应力应变曲线的上升段;Elwi 和 Murray 式虽然表达了上升段和下降段,但表达式繁琐,且控制条件中对于极限点 $\sigma=\sigma_u=k\sigma_0$ 仍有一不确定系数 k ,需进一步研究给出;我国清华大学建议的两段式形式简单,但参数选择不当,曲线将不符合混凝土的材性表现。Sargin 建议的应力应变关系表达式简捷,参数少,且基本符合混凝土试验曲线的几何特点,能反映其全部受力性能,故选用之。具体表达如下:

$$\frac{\sigma}{f_c} = \frac{A \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + (D-1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2}{1 + (A-2) \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + D \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2}, \quad (4)$$

式中, $A=E_0/E_c$, E_0 和 E_c 分别为初始弹性模量和混凝土应力达峰值 f_c 时的割线模量; D 表示系数,当 $A \leq 2$ 时, $(1-A/2)^2 \leq D \leq 1+A(A-2)$, 当 $A > 2$ 时, $0 \leq D \leq 1$ 。 D 是影响曲线下降段的参数,不同 D 值的 $\sigma-\epsilon$ 曲线见图 1。

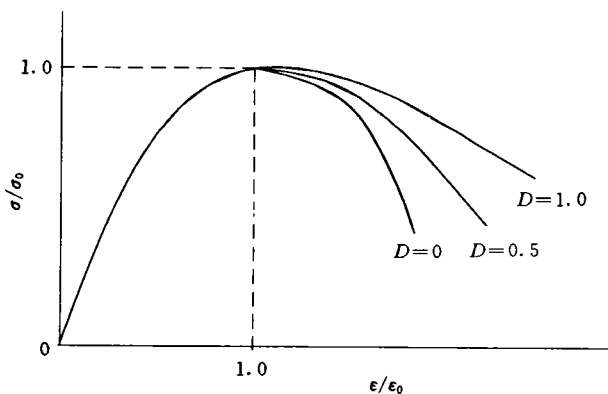


图1 Sargin 一维应力应变关系曲线

Fig. 1 Sargin-uniaxial stress-strain relationship with different D

3.2 割线模量

以三向应力状态下的非线性应力指标 β 代替 (4) 式中的 σ/f_c , 即可得出三向应力状态下混凝土的即时割线模量 E_s 。

$$E_s = \frac{1}{2} E_0 - \beta \left(\frac{1}{2} E_0 - E_f \right) \pm$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2} E_0 - \beta (E_0 - E_f) \right]^2 + \beta E_f^2 [D(1-\beta) - 1]}, \quad (5)$$

式中,根号前的“+”号适应于曲线上升段,“-”号适应于曲线下降段。 E_f (当为单轴受力时, $E_f=E_c$) 为三轴应力状态下混凝土破坏时的割线弹性模量,建议取

$$E_f = E_c / [1 + 4(A-1)x],$$

式中, $x = \left(\frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)_f - \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$, 若算得 $x \leq 0$ 时, 取 $x=0$ 。

3.3 割线泊松比

$$v_s = \begin{cases} v_0, & \beta \leq 0.8 \\ v_f - (v_f - v_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta - 0.8}{0.2} \right)^2}, & 0.8 < \beta \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

通常取 $v_0=0.16 \sim 0.2$, $v_f=0.36 \sim 0.42$ 。

求得割线弹性模量 E_s 和割线泊松比 v_s 后, 用 E_s 和 v_s 代替广义虎克定律中的常量弹性模量 E 和泊松比 ν , 即可由已知应力状态计算出应力应变关系。

4 结 语

(1) 考虑了三维应力状态下混凝土破坏面的主要特征, 比较各种材料破坏准则, 建议了一种四参数破坏准则, 该准则即描述了混凝土破坏包络面的主要几何特征, 其参数标定简单, 便于工程实用。

(2) 主要分析了材料非线性指标, 根据一些试验资料提出了用拉、压指标区别表示不同拉、压三维应力状态的非线性指标, 使其更加合理地反映混凝土的实际应力状态。

(3) 选取比较常用的等效一维应力应变关系, 已有大量的试验资料证实其实用性。由此可见, 本文提出的非线性本构模型中 3 个条件较为合理, 便于有限元实施。

[参考文献]

- [1] 过镇海. 混凝土的强度和变形试验基础和本构关系[M]. 北京:清华大学出版社,1997.
- [2] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安:陕西科学技术出版社,1994.
- [3] 江见鲸,傅德炫,王立翔. 建筑结构计算机分析及程序[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
- [4] Nilsson A H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method[J]. ACI Journal,1968,(65):469—483.
- [5] Liu C S, Scordelis A C. Nonlinear analysis of reinforced concrete shells of general form[J]. Journal of Structural Division, ASCE, 1975, (101), 434—451.
- [6] Kupfer H, Gerstle K. Behavior of concrete under biaxial stress[J]. Journal of Engng Mech Div, ASCE, 1973, 99(4): 853—866.
- [7] Bresler B, Pister K S. Strength of concrete under combined stresses[J]. Journal of ACI, 1958, (55): 321—346.
- [8] Ottosen N S. 混凝土的破坏准则[A]. 混凝土的强度和破坏译文集[C]. 北京:水利出版社,1982.
- [9] Ottosen N S. A failure criterion for concrete[J]. ASCE, 1977, (103): 527—535.
- [10] 沈聚敏,王传志,江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M]. 北京:清华大学出版社,1993.
- [11] Kotsovos M D. A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress[J]. Magazine of Concrete Research, 1979, 31(108): 151—158.
- [12] Podgoroki J. General failure criterion for isotropic media[J]. ASCE, 1985, 111(2): 188—201.
- [13] 过镇海,王传志. 多轴应力下混凝土的强度和破坏准则研究[J]. 土木工程学报, 1991, 24(3): 1—14.
- [14] 过镇海,王传志,张秀琴,等. 混凝土的多轴强度试验和破坏准则研究[A]. 清华大学抗震抗爆工程研究室. 科学研究报告集第六集 混凝土力学性能的研究[C]. 北京:清华大学出版社,1996. 1—51.
- [15] 徐 焱. 混凝土三轴抗压强度与变形的试验研究[D]. 北京:清华大学,1991.
- [16] 叶献国. 三轴受压混凝土的强度和变形试验研究[D]. 北京:清华大学,1988.
- [17] 朱伯龙,董振祥. 钢筋混凝土非线性分析[M]. 上海:同济大学出版社,1985.
- [18] Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections[M]. Canada, Study No. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, 1971.

Discussion on nonlinear constructive model for concrete

YUAN Zhi-fen, WANG Zheng-zhong, ZHAO Bin

(College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest Sci-Tech University
of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: In this article, the present strength failure criteria of materials are compared and analyzed, and an advisable criterion is raised; Two stress nonlinear level parameters β_i, β_c are used, defining the various stress state; Sargin formula is adapted to express the uniaxial stress-strain relationship. Thus, a rational nonlinear constructive model is formed by combining the three aspects above. It would be convenient to practice the finite element method.

Key words: strength failure criterion of concrete; stress level parameter; constructive model