

15

解决模糊综合评判中失效与失真问题的方法

宋世德 周静芳 袁志发

(西北农业大学基础科学系, 陕西杨陵 712100)

摘 要 通过定义左、右加权合成运算, 避免了模糊综合评判中的失效与失真问题, 同时保证了运算结果的唯一性、科学性和可靠性, 并能保持原模糊矩阵的实际背景。

关键词 模糊综合评判, 失效, 失真, 加权合成

中图分类号 O159

1 模糊综合评判中出现的失效与失真问题

进行模糊综合评判时, 设评价对象集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 评判因素集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 评语集 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$, 由因素 x_i 对评语 y_j 的隶属度 r_{ij} 构成的模糊评判关系矩阵 R 为:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1r} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mr} \end{bmatrix}$$

其中: $0 \leq r_{ij} \leq 1$; 在评判中各因素的权重 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 其中 $0 < a_i < 1$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$. 则模糊综合评判的结果为: $B = A \circ R$, 其中“ $\circ$ ”表示模糊乘积即合成运算. 合成运算通常用扎德(Zadeh)算子($\wedge, \vee$)进行.

在农业生产方案选优^[1]问题中, 各因素对评语的隶属度构成的模糊关系矩阵 R 为:

$$R = \begin{bmatrix} 0.715 & 0.335 & 0.965 \\ 0.550 & 0.725 & 0.125 \\ 0.620 & 0.950 & 0.190 \\ 0.810 & 0.690 & 0.375 \\ 0.495 & 0.495 & 0.165 \end{bmatrix}$$

各因子在评判中的权重分配为: $A = (0.25, 0.25, 0.1, 0.2, 0.2)$, 得评判结果 $B = A \circ R = (0.25, 0.25, 0.25)$. 可以看出, 这样的评判结果是毫无意义的. 文献[2]把这类问题称为模糊乘积的失效. 另一类是有关模糊乘积的失真问题^[2], 这里不再赘述.

2 解决失效与失真的现有方法与问题的定性分析

目前解决模糊乘积中失效与失真问题的方法有: 改变模糊乘积算子法, 如($\vee, \cdot$); 巢式系统设计下的多级综合评判模型^[1]及对模糊关系矩阵进行等均数处理^[2]等方法. 其中

改算子为 $(\vee, \cdot)$ 的办法计算量小、简便、直观,但不能保证评判结果不失效也不失真,可能出现结果数值普遍太小难于分辨优劣;巢式系统设计法可以消除失效和失真,也比较灵活,但需要太多的权重确立过程,人为不确定因素多,可靠性相对降低;等均值处理法简单而且可靠,但却导致失去 R 的实质含义如生物学背景,且没有给出方法的理论根据^[2]。

可以认为,造成模糊乘积失效与失真的原因是 R 中的元素与 A 中的元素满足的条件不同。这是因为 R 满足条件 $0 \leq r_{ij} \leq 1$,而 A 满足条件 $0 < a_i < 1$,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$ 。可见 A 比 R 多了一个约束条件,也正是这个约束条件使 A 中的元素数值大小随元素个数的增多愈来愈小,因而当 m 较大时,合成运算在第一步的取小过程中极易取得 A 中的元素,故此使评判失效或失真的概率就相对增大。另一方面,由于 A 中各元素值的大小反映了各因素在评判中所起作用的大小比例,对于任意的常数 k , $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 和 $A = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_m)$ 本质上是没区别的。但若对 A 不加约束,随着 k 的不同将得出不同的评判结果。因此,我们想到能否利用 R 来约束 A 呢?

3 解决失效与失真的理论基础

为此,定义如下概念:

定义 设 $A = (a_{ik})_{m \times l}$, $R = (r_{kj})_{l \times n}$ 分别为两个模糊矩阵, $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 为 A 的行权重向量,则称 $B = C * A \circ R = (b_{ij})_{m \times n}$ 为 A 与 R 以 C 为权重的左加权合成,其中 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (c_j a_{ik} \wedge r_{kj})$; ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$)。同理,若 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_m)^T$ 为 R 的列权重向量,则称 $B = A \circ R * C^T = (b_{ij})_{m \times n}$ 为 A 与 R 以 C 为权重的右加权合成,其中 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (a_{ik} \wedge r_{kj} c_i)$; ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$)。

以上定义中的“ $*$ ”表示是按上述定义法则运算的记号,而非普通矩阵乘法。

这种加权合成的本质是对 A 的行或 R 的列乘以一个缩放因子后,再用扎德算子合成,因而加权合成与普通合成并无质的区别。基于上述定义,我们有如下几个定理:

定理 1 如果 A 与 R 的合成失效,则至少存在一 A 的行权重向量 C ,使 A 与 R 的左加权合成不失效。

证明 设 $A = (a_{ik})_{m \times l}$, $R = (r_{kj})_{l \times n}$,由于 A 与 R 合成失效,由定义^[2]知: $B = A \circ R = (b_{ij})_{m \times n} = D$ 。其中, D 是所有元素均为同一常数 d 的矩阵,即 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (a_{ik} \wedge r_{kj}) = d$ ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$)。对于任意的 j ,总存在常数 c_j ,使 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (c_j a_{ik} \wedge r_{kj}) = d_{ij} \neq d$ ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$),且使 d_{ij} 中至少有两个不相等。这是因为假定 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (a_{ik} \wedge r_{kj}) = d = r_{ij}$ ($1 \leq i \leq l$),则 $a_{is} > r_{ij}$,显然存在 c_j 能使 $c_j a_{is} < r_{ij}$,事实上只需取 $c_j < r_{ij}/a_{is}$ 即可。从而 $b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (c_j a_{ik} \wedge r_{kj}) \neq r_{ij} = d$ 。同理,若 $d = a_{is}$,可得出同样结论。显然,要使 d_{ij} 中至少两个不相等是很容易满足的。

定理 2 如果 A 与 R 的合成失效,则至少存在一 R 的列权重向量 C ,使 A 与 R 的右加权合成不失效。

该定理证明同定理 1,故略。

定理3 如果 A 与 R 的合成失真, 则至少存在一 A 的行权重向量 C , 使 A 与 R 的左加权合成不失真。

证明 设 $A = (a_{ik})_{m \times l}$, $R = (r_{kj})_{l \times n}$, 由 A 与 R 合成失真的充要条件^[8], 必有 $a_{ik} \leq r_{kj}$ (或 $a_{ik} \geq r_{kj}$) 对所有的 i, j, k 成立。不妨假定 $a_{ik} \leq r_{kj}$, 则显然存在一 c_i , 使不等式 $c_i a_{ik} > r_{kj}$ 对所有的 i, k 成立。若这时取 $C = (1, 1, \dots, 1, c_i, 1, \dots, 1)^T$, 则左加权合成 $C * A \circ R$ 不会失真。

对于 c_i , 只需满足 $c_i > \max_k(r_{kj}) / \min_k(a_{ik})$, 一定可得出上述结论。对 $a_{ik} \geq r_{kj}$ 的情形, 证法同上。

定理4 如果 A 与 R 的合成失真, 则至少存在一 R 的列权重向量 C , 使 A 与 R 的右加权合成不失真。

该定理的证明同定理3。

由于 A 的行权重向量或 R 的列权重向量有不唯一的取法, 它们均可消除合成运算中的失效或失真, 但也正是这种不唯一性, 导致了评判结果也不唯一。因此, 现在的问题是如何寻求一个恰当的权重向量 C , 使得这种加权合成既能保证评判结果的唯一性, 又能保持评判结果的可靠性和科学性。

4 权重向量 C 的确定

作者在定性分析中已经指出, 造成这种模糊合成运算失效与失真的主要原因是由于合成对象双方在数量上受到了不同的约束而引起, 如 A 为权重向量时, 人们习惯上均给 A 加一约束 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$, 从而导致 A 中各元素当 m 较大时各分量普遍偏小, 最终导致合成的失效或失真。基于这一点, 我们选择加权因子 C 时, 就要使加权后双方处于相同的数量约束, 从而在取大与取小过程中具备可比性。

在左加权合成 $B = C * A \circ R$ 时,

$$\text{令 } c_j = \sum_{k=1}^l r_{kj} / \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l a_{ik} = m \sum_{k=1}^l r_{kj} / \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l a_{ik}; \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\bar{r}_j = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l r_{kj}, \bar{a}_i = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l a_{ik}, \bar{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{a}_i,$$

$$\text{则 } c_j = l \bar{r}_j / \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{a}_i = \bar{r}_j / \bar{a} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{这时有 } b_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (\bar{r}_j \bar{a}_i a_{ik} \wedge r_{kj}) = \bigvee_{k=1}^l [\bar{r}_j (a_{ik} \bar{a}) \wedge r_{kj}].$$

显然, 经这样变换后, A 中各元素所占比例没有变化, 仅是在与 R 进行合成时作了等数量级变换而已, 这样在取大取小运算过程中就不至于只取到某一方的元素, 且不改变 R 中各元素值的大小, 保持了 R 原有的实质含义如生物学背景等。

同理, 若 A 中各元素值有实质性含义或现实背景, 可用右加权合成 $B = A \circ R * C^T$,

$$\text{令 } c_i = \sum_{k=1}^l a_{ik} / \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l r_{kj} = n \sum_{k=1}^l a_{ik} / \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l r_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

以下的讨论同左加权合成, 不再赘述。

当 A 为常用的一维权重向量时,通常 A 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 而 R 具有生物学背景,故可用左加权合成,

$$\text{这时} \quad c_j = \bar{r}_j / \bar{a} = l\bar{r}_j = \sum_{k=1}^l r_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$b_{ji} = \bigvee_{k=1}^l (l\bar{r}_j a_k \wedge r_{ki}),$$

即 A 的行权重向量为 R 的列和。

本文开头所举农业生产方案选优一例中的 R 是具有生物学实际背景的,其值的大小反映了某方案对某种评语的隶属程度,因而应让其保持不变;权重向量 A 表示各评判因子在评判过程中所起的作用大小比例,故可用左加权合成运算。按本文提出的原则,

$$\text{可得} \quad C = \left(\sum_{k=1}^5 r_{k1}, \sum_{k=1}^5 r_{k2}, \sum_{k=1}^5 r_{k3} \right) = (3.19, 3.195, 1.82)$$

合成结果 $B = C * A \circ R = (0.715, 0.725, 0.455)$ 。由此可知,第二种生产方案最优,第一种略次,第三种则不可取。若不十分严格时,第一、二两种生产方案均可作为选择对象加以考虑。关于这两种方案是否存在显著差异,以及在实际生产中应选取哪种生产方案,可用多种方法判别筛选,由于这不是本文讨论的范畴,故不再赘述。

另外值得提出的是,本文所提出的加权合成方法不仅对消除失效与失真问题是有效的,而且同样适用于一切不管合成结果是否失效或失真的模糊关系的合成,且能使合成结果更具合理性、可靠性和科学性。

参 考 文 献

- 1 袁志发,孟德顺.模糊数学在农林上的应用.陕西杨陵:天则出版社,1990.110~142
- 2 余国建.模糊乘积的“失效”、“失真”及其消除.应用数学,1988,(1~2):17~22
- 3 袁志发,常智杰.模糊数学在农业上的应用.陕西农业科学,1987(1~6)
- 4 汪培庄.模糊集合论及其应用.上海:上海科学技术出版社,1984
- 5 冯德益,楼世博.模糊数学方法及其应用.北京:地震出版社,1984

The Solution to Lost Efficacy and Distortion in Fuzzy Product

Song Shide Zhou Jingyu Yuan Zhifa

(Department of Basic Sciences, Northwestern Agricultural University, Yangling Shaanxi, 712100)

Abstract With the definition of the left and right weighted fuzzy product, the problem of lost efficacy and distortion, could be avoided while keeping the meaning of the nature of the original fuzzy matrix, it can vouch for the only reliable and scientific result.

Key words fuzzy product, lost efficacy, distortion, weighted product