71-74

第24卷 第2期 西北农业大学学报 Vol. 24 No. 2
1996年4月 Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalis Apr. 1996

模糊决策中的综合距离优先法

周静芋 宋世德 袁志发
（西北农业大学基础科学系，陕西杨陵 712100）

摘 要 本文提出的用于模糊决策的综合距离优先法与相似优先比法是等价的，但综合距离优先法更为直观、简洁。

关键词 综合距离优先法，相似优先比法，模糊决策
中图分类号 O159

许多实际应用和科学研究中都会遇到多因子的综合相似分析问题，如农业生产中优良品种的引种及先进经验的推广，气象学中评价天气图的相似程度等。80年代文献[1～4]介绍的模糊决策中的相似优先比法是解决此类问题的常用方法。但这种方法要对建立的每个因子的模糊优先比矩阵多次取 λ 截矩阵以进行单因子的相似性比较，这个过程比较麻烦。本文提出的综合距离优先比法具有不用建立多因子的模糊优先比矩阵，免去多次求各因子模糊优先比矩阵的 λ 截矩阵的过程，便于通过 α 的选择控制相似分析结果的排序，以减少随机因素的干扰，且分析结果与相似优先比法等价等优点。

1 综合距离优先法

设给定样品集合 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，标准样品 u_0。欲对其进行 m 个因素的比较，以确定哪一个样品与标准样品更为相似，即给出 n 个样品与标准样品的综合相似程度的排序。其方法如下：

1）确定各样品和标准样品的各因素的距离 $D_i^{(t)}$；$i=1,2\cdots,n$；$t=1,2,\cdots,m$。其中距离可以是各种距离，如选择海曼距离，则 $D_i^{(t)}=|u_i^{(t)}-u_0^{(t)}|$。

2）对每一个因素 t，以 $D_i^{(t)}$，$i=1,2,\cdots,n$，进行大小排序，亦即用各样品与标准样品的距离大小作为各样品与标准样品相似程度的度量：距离越小者，相似程度越大。赋于距离最小者，排序号为1，依此类推。当遇到距离相同时，则赋于同样的序号（单因素排序）。

3）对每一个样品，将其各因素的排序号相加，其和即为综合考虑了诸因素之后，该样品与 u_0 的相似程度，和数越小，则该样品与标准样品越相似，赋于和数最小者序号为1，并依此类推。同样地，当遇到和数相同时，赋于同样的序号（综合排序）。

4）当各因素在决策中所占地位不同时，可适当对各因素的排序号赋于权重因子 $w_t(t=1,2,\cdots,m)$，且满足 $\sum_{t=1}^{m}w_t=1$，这样就可得到更满意、更符合实际的结果。

5）为了使相似程度接近的样品排序号相同，并排除随机因素的干扰，以利决策，可以采用多种方法。如定义

$$\overline{D}_i^{(t)}=(D_i^{(t)}-D_{i\min}^{(t)})/(D_{i\max}^{(t)}-D_{i\min}^{(t)}) \qquad (1)$$

收稿日期：1994-12-21

其中，$D_{i\max}^{(t)}$和 $D_{i\min}^{(t)}$分别为$\{D_i^{(t)}\}(i=1,2,\cdots,n)$中的最大值和最小值，这时 $0\leqslant\overline{D}_i^{(t)}\leqslant1$，规定，当

$$|\overline{D}_i^{(t)}-\overline{D}_j^{(t)}|\leqslant\alpha \tag{2}$$

时，赋于 u_i 和 u_j 同一序号，即在 α 水平下，对因素 t 来说，u_i 和 u_j 与 u_0 有同样的相似程度。

如用海曼距离时，也可定义

$$\overline{D}_i^{(t)}=D_i^{(t)}/|u_0^{(t)}| \tag{3}$$

这样，$0\leqslant\overline{D}_i^{(t)}\leqslant1$，规定当$|\overline{D}_i^{(t)}-\overline{D}_j^{(t)}|\leqslant\alpha$ 时，赋于 u_i 和 u_j 相同的序号。

2 两种方法的等价性

2.1 相似优先比法[1~3]

给定样品集合 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，标准样品 u_0. 要对这 n 个样品和标准样品 u_0 进行 m 个因素的比较，以确定哪一个样品与标准样品更为相似，即要求给出 n 个样品与标准样品 u_0 的综合相似程度的排序。其方法如下：

1)确定各样品和标准样品各因素的距离 $D_i^{(t)}$； $i=1,2,\cdots,n$； $t=1,2,\cdots,m$.

2)确定相似优先比和模糊相似优先比矩阵。相似优先比是以成对样品与标准样品作比较，以确定哪个与标准样品更相似，从而选择与标准样品相似程度较大者的一种方法。

定义相似优先比 $r_{ij}^{(t)}=D_j^{(t)}/(D_j^{(t)}+D_i^{(t)})$ $i,j=1,2,\cdots,n$； $t=1,2,\cdots,m$.

定义模糊相似优先比矩阵

$$R^{(t)}=(r_{ij}^{(t)})\qquad i,j=1,2,\cdots,n;\ t=1,2,\cdots,m$$

其中 $r_{ij}^{(t)}=1-r_{ji}^{(t)}, r_{ii}^{(t)}=0.$

3)用 λ 截矩阵法确定各样品在各因素下的排序。具体方法如下：对每一个 $R^{(t)}$由大到小的选取 λ，$\lambda\in[0,1]$，以首先达到除对角线元素以外全行为 1 的 λ 截矩阵所对应的样品与标准样品最为相似，并赋于序号 1. 如果当 $\lambda=\alpha$ 时，第 i 行诸元素除对角线元素外全为 1，说明 u_i 比其他样品更相似于 u_0，其水平为 α. 然后删除该样品的影响，亦即删去该行及所对应的列，再降低 λ 值，依次求取与标准样品相似的样品，并分别赋予序号 2，3…等。

4)综合排序。把各样品在每个因素的模糊相似优先比矩阵中的排序号相加，其和即为综合考虑诸因素后该样品与 u_0 的相似程度，和数越小，则该样品与标准样品越相似。

显然相似优先比法要比综合距离优先法计算过程麻烦得多：首先要多计算相似优先比 $r_{ij}^{(t)}$，$i,j=1,2,\cdots,n$；$t=1,2,\cdots,m$，并建立 m 个模糊相似优先比矩阵。其次是对每一个模糊相似优先比矩阵反复用 λ 截距阵法对各因子进行样品排序，这也是最繁琐的一步。

2.2 两种方法等价

定理 在 $R=(r_{ij})_{n\times n}$中，$r_{ij}=D_j/(D_i+D_j)$，$r_{ji}=1-r_{ij}$且 $D_i\neq D_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，$D_i\geqslant0$. 若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{D_i\}=D_s$，$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{D_i\}=D_k$，则有 $r_{ks}>r_{ij}$ $(i\neq k\ i,j\neq s,j=1,2,\cdots,n)$.

证明 (1)当 $D_k=0$，因 $D_j>D_k=0$，$r_{ij}<1(i\neq k,i,j=1,2,\cdots,n)$，则必有 $r_{ks}=1>r_{ij}$.

(2)当 $D_k\neq0$，若∃ i,j 使 $r_{ij}>r_{ks}$ 即 $D_j/(D_j+D_i)>D_s/(D_s+D_k)\Rightarrow D_jD_s+D_jD_k>D_jD_s+D_iD_s\Rightarrow D_jD_k>D_iD_s\Rightarrow D_j/D_s>D_i/D_k$，因为 $D_s\geqslant D_j>0$，$0<D_k<D_i$，所以 $D_j/D_s>$

D_i/D_k 显然是不可能的。

下面证明两种方法的等价性。

由上述定理，在 $R=(r_{ij})$ 中，元素最大者必是位于 D_i 最小的一行、D_j 最大的一列的交叉处，即 $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{r_{ij}\}=r_{kl}$.

其中，$D_k=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{D_i\}$，$D_l=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{D_j\}$，所以当 λ 由 1 逐渐下降时，首先变为 1 的元素就是 r_{kl}.

对每一列而言，只要 $\{D_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同，每一列的各元素必不相同，

且　　$r_{ij}=[D_j/(D_j+D_i)]<[D_j/(D_j+D_k)]\quad(i\neq k,i=1,2,\cdots,n)$

即对每一列来说，都是第 k 行的元素最大，所以当 λ 由 1 逐渐向 0 下降时，首先全行除对角线元素外皆为 1 的行必是第 k 行，故第 k 行所对应的样品排序号为 1，即各距离 $\{D_i\}$ 中，距离最小者（与标准样品）的样品排序号为 1.

删去 R 中第 k 行和第 k 列的元素之后，$(n-1)$ 阶矩阵中最大的元素必为 r_{em}.

其中，$D_e=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n,i\neq k}\{D_i\}$，$D_m=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq k}\{D_j\}$，对每一列而言，只要 $\{D_i\}(i=1,2,\cdots,n,i\neq k)$ 互不相同，每一列的各元素必不相同，且

$$r_{ij}=[D_j/(D_j+D_i)]<[D_j/(D_j+D_e)]\quad(i\neq k,i\neq e,i=1,2,\cdots,n)$$

即对每一列来说，都是第 e 行的元素最大，所以在 λ 继续下降的过程中，首先全行除对角线元素以外皆为 1 的行必是第 e 行。故第 e 行所对应的样品排序号为 2. 亦即在距离 $\{D_i\}$ 中，距离第 2 小的样品排序号为 2. 依此类推。

如果 $\{D_i\}$ 中，$i=1,2,\cdots,n$ 中有 $D_i=D_j(i\neq j)$，那么 R 中第 i 行和第 j 行的元素除去第 i 列和第 j 列的元素之外皆相等，且 $r_{ii}=r_{jj}=0$，$r_{ij}=r_{ji}=0.5$，所以这两行元素在 λ 由 1 向 0 逐渐变化时，它们同时除对角线元素以外全为 1，故它们所对应的样品的排序号一样。

上述证明表明，两种方法所得样品的排序结果是完全一致的，即两种方法是等价的。

3　应用例

例[1]　福岗（u_0）是日本柑桔主要产地之一，其主要环境因子为：年平均气温（x_1）、年平均降水量（x_2）、年日照时数（x_3）、年极端最低气温（x_4）和一月份平均气温（x_5）。拟引种地区为我国的合肥（u_1）、武汉（u_2）、上海（u_3）、长沙（u_4）、桂林（u_5）、温州（u_6）和成都（u_7）。1951～1970 年各地环境因子的平均值如表 1 所示（只列出 x_1，x_2）。

表 1　各地环境因子的平均值

地区	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_0
x_1	15.7	16.3	15.7	17.2	18.8	17.9	16.3	16.2
x_2	970	1260	1120	1422	1874	1698	976	1492

由表 1 计算的各地区与福岗的第一和第二个环境因子（x_1，x_2）的海曼距离，及用综合距离优先比法所得单因子 x_1 与 x_2 的各地区排序结果如表 2 所示。

表2 单因子排序表(综合距离优先比法)

地区		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	距离	0.5(0.03)	0.1(0.01)	0.5(0.03)	1.0(0.06)	2.6(0.78)	1.6(0.10)	0.1(0.01)
	排序	2(2)	1(1)	2(2)	3(3)	5(5)	4(4)	1(1)
x_2	距离	522(0.35)	232(0.16)	370(0.25)	70(0.05)	382(0.26)	206(0.14)	516(0.35)
	排序	7(6)	3(3)	4(4)	1(1)	5(5)	2(2)	6(6)

表2距离中括号内的数据是用(3)式计算的 $\overline{D}_i$，排序中括号里的数据是根据(2)式在 $\alpha=0.01$ 水平下的排序。由表2计算的各地区与福岗的第一和第2个环境因子(x_1 和 x_2)的相似优先比矩阵如下：

$$R^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0.167 & 0.500 & 0.667 & 0.839 & 0.762 & 0.167 \\ 0.833 & 0 & 0.833 & 0.909 & 0.963 & 0.941 & 0.500 \\ 0.500 & 0.167 & 0 & 0.667 & 0.839 & 0.762 & 0.167 \\ 0.333 & 0.091 & 0.333 & 0 & 0.722 & 0.615 & 0.091 \\ 0.161 & 0.037 & 0.161 & 0.278 & 0 & 0.381 & 0.037 \\ 0.238 & 0.059 & 0.238 & 0.385 & 0.619 & 0 & 0.059 \\ 0.833 & 0.500 & 0.833 & 0.909 & 0.963 & 0.941 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0.308 & 0.416 & 0.118 & 0.423 & 0.283 & 0.497 \\ 0.692 & 0 & 0.616 & 0.232 & 0.622 & 0.470 & 0.690 \\ 0.584 & 0.384 & 0 & 0.158 & 0.507 & 0.356 & 0.581 \\ 0.882 & 0.768 & 0.842 & 0 & 0.845 & 0.746 & 0.881 \\ 0.577 & 0.378 & 0.493 & 0.155 & 0 & 0.350 & 0.575 \\ 0.717 & 0.530 & 0.644 & 0.254 & 0.650 & 0 & 0.715 \\ 0.503 & 0.310 & 0.419 & 0.119 & 0.425 & 0.285 & 0 \end{bmatrix}$$

用相似优先比法得到的各地区与福岗相似程度的排序结果，与表2中的排序结果完全一致。从 R 的各数据中不难看出，当 r_{ij} 取的小数点后位数不同，所得到的排序结果可能不一样，若当 $R^{(2)}$ 中，r_{ij} 皆取小数点后2位，则 u_1 和 u_7 就同排第6号，其他样品排序号同表2，综合距离优先法的第5步就可能克服这一现象，我们可以通过对 α 的选取来控制排序。

参考文献

1 袁志发，孟德顺. 模糊数学在农林上的应用. 陕西杨陵：天则出版社，1990. 150～154

2 贺仲雄. 模糊数学及其应用. 天津：科学技术出版社，1983. 137～151

3 冯德益，楼世博. 模糊数学方法与应用. 北京：地震出版社，1988. 145～148

4 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海：上海科学技术出版社，1983. 254～267

Method of Synthetic Distance Priority in Fuzzy Decision

Zhou Jingyu Song Shide Yuan Zhifa

(Department of Basic Science, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract A method of Synthetic distance priority in fuzzy decision was suggested, which is equivalent to the method of the similar priority ratio, but with the characteristics of more visual and concise features.

Key words method of synthetic distance, method of similar priority ratio, fuzzy decision