

关于实数的连续性准则

王 乃 信

(西北农业大学计算中心, 陕西杨陵 712100)

摘 要 将实分析中的实数连续性准则划分为三组, 证明了如下结论: 在每组中各条准则是互相等价的; 第 I 组准则等价于第 II 组准则加上第 III 组准则; 而第 II 组准则与第 III 组准则则是彼此独立的。

关键词 实数, 实分析, 连续性, 准则

中图分类号 O171

在实分析中, 实数的连续性起着关键的作用。因此, 许多数学家曾致力于实数连续性的描述, 其中最著名的先后有: Archimedes, Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Heine, Dedekind, Cantor, Borel, Lebesgue. 在数学史中, 实分析的每一步发展, 总是与对实数连续性的挖掘有关; 实分析的进一步扩充, 也多从对实数连续性的改造入手(如非标准超实数域的建立)。因之, 精细地分析迄今对实数连续性的各种描述, 仍是有意义的。

可以将实分析中对实数连续性的种种描述划分为如下三组准则:

I.1 设非空集合 X, Y 是实数集合 R 的分割, 即 $X \cup Y = R$, 且对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 恒有 $x < y$, 则存在 ξ , 使对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 恒有 $x \leq \xi \leq y$.

I.2 非空集合如果有上界, 则必有上确界, 即最小上界。

I.3 如果有界闭集合 A 被开区间族 $\mathcal{A}$ 覆盖, 即对于任意的 $x \in A$, 必有 $(a, b) \in \mathcal{A}$, 使 $a < x < b$, 则 A 必可被 $\mathcal{A}$ 中有限个开区间覆盖。

I.4 有界无限集合必有极限点。

I.5 有界序列必有收敛子序列。

I.6 单调有界序列必收敛。

II.1 设 $\{x_n\}$ 为基本序列, 即对于任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 N , 使当 $n_1, n_2 > N$ 时, 恒有 $|x_{n_2} - x_{n_1}| < \epsilon$, 则 $\{x_n\}$ 收敛。

II.2 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套, 即恒有 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在 ξ , 使对于任何 n , 恒有 $\xi \in [a_n, b_n]$ 。

III.1 对于任意的 $a > 0$ 和 b , 总存在自然数 n , 使 $na > b$ 。

III.2 对于任意的 b , 总存在自然数 n , 使 $n > b$ 。

III.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

本文仅预先假定实数集合构成有序域, 自然数集合是该有序域的一个归纳集合, 证明如下结论: 在每组中各条准则是互相等价的; 第 I 组准则等价于第 II 组准则加上第 III 组准则。

收稿日期: 1994-11-04

则;第Ⅰ组准则与第Ⅲ组准则是彼此独立的。

1 I 中诸准则等价

1.1 → 1.2

设非空集合 A 有上界, 记上界集合为 Y , 令 $X = R \setminus Y$, 则 X, Y 构成 R 的分割. 故知有 ξ , 使对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 恒有 $x \leq \xi \leq y$. 该 ξ 亦为 A 的上界, 从而为 A 的上确界. 因为, 假设 ξ 不为 A 的上界, 则必有 $a \in A$, 使 $\xi < a$, 注意到 $\xi < \frac{1}{2}(\xi + a) < a$, 因而, $\eta = \frac{1}{2}(\xi + a)$ 也不为 A 的上界, 即 $\eta \in X$, 又满足 $\xi < \eta$, 这是不可能的。

1.2 → 1.3

设有界闭集合 $A \subset (a, b)$ 被开区间族 $\mathcal{A}$ 覆盖. 假设 A 不能被有限个开区间覆盖, 令 $X = \{x | A \cap [a, x] \text{ 能被有限个开区间覆盖}\}$, 则 $a \in X$, 且 b 为 X 的上界, 故知 X 有上确界 ξ , 即任取 $\epsilon > 0, A \cap [a, \xi - \epsilon]$ 能被有限个开区间覆盖, 而 $A \cap [a, \xi + \epsilon]$ 则不能, 从而 $A \cap [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ 也不能被有限个开区间覆盖, 由此知 $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ 上有 A 的无限多元素, 因而 ξ 为 A 的极限点, 故 $\xi \in A$. 设有开区间 $(c, d) \in \mathcal{A}$ 覆盖 ξ , 取

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \min\{\xi - c, d - \xi\},$$

则 $A \cap [\xi - \epsilon_0, \xi + \epsilon_0]$ 被开区间 (c, d) 覆盖, 由此构成矛盾, 故知 A 能被有限个开区间覆盖。

1.3 → 1.4

设 A 为有界无限集合, $A \subset [a, b]$. 假设 A 无极限点, 则任取 $x \in [a, b]$, 总有相应的 $\epsilon = \epsilon(x) > 0$, 使开区间 $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ 内仅含 A 的有限个元素, 而且, 由此得到的开区间族覆盖有界闭集合 $[a, b]$, 故知 $[a, b]$ 能被有限个这样的开区间覆盖, 从而 $[a, b]$ 仅含 A 的有限个元素, 这样, A 只可能为有限集合, 由此构成矛盾. 故知 A 必有极限点。

1.4 → 1.5

设 $\{x_n\}$ 为有界序列, 又设 A 为以序列 $\{x_n\}$ 的项为元素的集合. 若 A 为有限集合, 则序列中必有某项重复无限多次, 因此有常数列作为 $\{x_n\}$ 的收敛子序列. 若 A 为无限集合, 因其有界, 故必有极限点 ξ . 在 $\{x_n\}$ 中顺次删去等于 ξ 的项, 得 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{y_n\}$, 又当 $k > 1$ 时, 如果

$$|y_k - \xi| \geq \min\{|y_1 - \xi|, \dots, |y_{k-1} - \xi|\},$$

则又删去 y_k , 则又得 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{z_n\}$, 此序列收敛于 ξ . 因为, 任取 $\epsilon > 0, (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ 内恒有 A 的无限多元素, 从而含有 $\{y_n\}$ 的无限项, 设 $y_N \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $z_n = y_{i_n}$, 其中 $i_n \geq n$, 故知

$$|z_n - \xi| < \min\{|y_1 - \xi|, \dots, |y_{i_n-1} - \xi|\} \leq |y_N - \xi| < \epsilon.$$

1.5 → 1.6

设序列 $\{x_n\}$ 单调有界, 故必有收敛子序列 $\{y_n\}$, 其中 $y_n = x_{i_n}, i_n \geq n$. 设 $\{y_n\}$ 收敛于 ξ , 则 $\{x_n\}$ 也收敛于 ξ . 因为, 任取 $\epsilon > 0$, 总有 M , 当 $n \geq M$ 时, 恒有 $|y_n - \xi| < \epsilon$. 取 $N = i_M$. 则当 $n \geq N$ 时, $i_M \leq n \leq i_n$. 由 $\{x_n\}$ 的单调性知, x_n 在 x_{i_M} 和 x_{i_n} 之间, 即在 y_M 和 y_n 之间, 故亦有 $|x_n - \xi| < \epsilon$.

I. 6 → I. 1

设 $X \cup Y = R$, 且对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 恒有 $x < y$. 取定 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 令 $z_0 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$, 若 $z_0 \in X$, 则令 $x_1 = z_0, y_1 = y_0$, 否则令 $x_1 = x_0, y_1 = z_0$, 当 $i > 0$, 令 $z_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i)$, 若 $z_i \in X$, 则令 $x_{i+1} = z_i, y_{i+1} = y_i$, 否则令 $x_{i+1} = x_i, y_{i+1} = z_i$, 由此得递增有界序列 $\{x_n\}$. 设其收敛于 ξ , 则对于任意的 $x \in X, y \in Y$, 恒有 $x \leq \xi \leq y$. 因为, 假设有 $y \in Y$, 使 $y < \xi$, 令 $\epsilon = \xi - y$, 则 $y = \xi - \epsilon$, 对于该 $\epsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - \xi| < \epsilon$, 由此得 $x_n > \xi - \epsilon$, 从而得 $x_n > y$, 这是不可能的. 假设有 $x \in X$, 使 $\xi < x$, 令 $\epsilon = x - \xi$, 对于该 $\epsilon > 0$, 存在 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - \xi| < \frac{1}{2}\epsilon$, 由此得 $x - x_n > \frac{1}{2}\epsilon$, 又令 $w_n = y_n - x_n = \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$, 则 $\{w_n\}$ 为递减有界序列, 设其收敛于 η , 对于上述 $\epsilon > 0$, 存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时

$$\frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) - \eta < \frac{1}{8}\epsilon,$$

$$\eta - \frac{1}{2^{n-1}}(y_0 - x_0) < \frac{1}{8}\epsilon,$$

由此又得

$$\frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

$$y_n - x_n < \frac{1}{2}\epsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $x > y_n$, 这也是不可能的.

2 I 中诸准则等价

I. 1 → I. 2

设闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. 对于每个 n , 取 $x_n \in [a_n, b_n]$, 构成序列 $\{x_n\}$, 任取 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使 $|b_N - a_N| < \epsilon$, 又由于当 $n > N$ 时, $x_n \in [a_n, b_n]$, 故知当 $n_1, n_2 > N$ 时,

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq |b_N - a_N| < \epsilon,$$

因而, $\{x_n\}$ 为基本序列. 设其收敛于 ξ , 则对于任何 $n, \xi \in [a_n, b_n]$. 因为, 假设有 m , 使 $\xi \notin [a_m, b_m]$, 取

$$\epsilon = \min\{|\xi - a_m|, |\xi - b_m|\},$$

对于该 $\epsilon > 0$, 当 $n > m$ 时, $|x_n - \xi| \geq \epsilon$, 这是不可能的.

I. 2 → I. 1

设 $\{x_n\}$ 为基本序列, 若 $\{x_n\}$ 为常数序列, 即从某一项起各项相等, 则显然收敛, 故以下假定 $\{x_n\}$ 非常数序列. 由于任取 $\epsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, 故知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$. 在序列 $\{|x_{n+1} - x_n|\}$ 中删去为零的项, 得正数序列 $\{\epsilon_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. 对于每个 $\epsilon_n > 0$, 存在 N_i , 当 $n > N_i$ 时, 对于任何 $P > 0$, 恒有 $|x_{n+P} - x_n| < \frac{1}{2}\epsilon_n$. 今取 $b_i = N_{i-1}$, 令 $c_i = x_{b_i} - \frac{1}{2}\epsilon_i, d_i = x_{b_i} + \frac{1}{2}\epsilon_i$, 则当 $n > b_i$ 时, 恒有 $x_n \in [c_i, d_i]$. 记 $[a_1, b_1] = [c_1, d_1]$, 当 $i > 1$ 时,

记 $[a_i, b_i] = [c_i, d_i] \cap [a_{i-1}, b_{i-1}]$, 则得闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 其中 $c_n \leq a_n \leq a_{n-1} \leq b_{n-1} \leq b_n \leq d_n$, 因而又有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 故知有 ξ , 使对任意的 i , 恒有 $\xi \in [a_i, b_i]$, 从而 $\xi \in [c_i, d_i]$.

对于任意的 $\epsilon > 0$, 总有 $\epsilon_i < \epsilon$ 及相应的 N_i , 使当 $n > N_i$ 时, $x_n \in [c_i, d_i]$, 从而

$$|x_n - \xi| < \epsilon_i < \epsilon.$$

故知 $\{x_n\}$ 收敛。

3 III 中诸准则等价

III.1 $\rightarrow$ III.2

已知 $1 > 0$, 故对于任意的 b , 存在 n , 使 $n \cdot 1 > b$, 此即 $n > b$.

III.2 $\rightarrow$ III.3

任取 $\epsilon > 0$, 对于 $\frac{1}{\epsilon}$, 存在 N , 使 $N > \frac{1}{\epsilon}$, 因而, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

故知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

III.3 $\rightarrow$ III.1

对于任意的 $a > 0$ 和 b , 若 $b \leq 0$, 则有 $1 \cdot a > b$. 若 $b > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 知, 对于 $\frac{a}{b} > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{a}{b}$, 此即 $na > b$.

4 I 与 II + III 等价

I.2 $\rightarrow$ I.2

设闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则以 a_n 为元素的集合 A 以任一 b_n 为上界, 故有上确界 ξ , 从而恒有 $a_n \leq \xi \leq b_n$, 即 $\xi \in [a_n, b_n]$.

I.2 $\rightarrow$ III.2

假设有 b , 使对任何 n , 恒有 $n \leq b$, 则自然数集合有上界, 从而有上确界 ξ , 即恒有 $n \leq \xi$, 且任取 $\epsilon > 0$, 总有 m 使 $m > \xi - \epsilon$. 此时取 $\epsilon = 1$, 则又得 $m + 1 > \xi$, 由此构成矛盾. 故知对于任何 b , 恒有 $n > b$.

I.1 + III.1 $\rightarrow$ I.6

设 $\{x_n\}$ 单调有界, 则必为基本序列, 从而收敛. 因为, 假设 $\{x_n\}$ 非基本序列, 则必有 $\epsilon > 0$, 对于任意的 N_1 , 有 $n_1 > N_1$ 和 $p_1 > 0$, 使

$$|x_{n_1+p_1} - x_{n_1}| \geq \epsilon,$$

当 $i > 1$ 时, 取 $N_i \geq n_{i-1} + p_{i-1}$, 则又有 $n_i > N_i$ 和 $p_i > 0$, 使

$$|x_{n_i+p_i} - x_{n_i}| \geq \epsilon.$$

由于 $\{x_n\}$ 单调, 故对任意的 k , 恒有

$$|x_{n_k+p_k} - x_{n_k}| \geq k\epsilon.$$

又由于 $\{x_n\}$ 有界, 故有 M , 使恒有

$$|x_{n_2-p_k} - x_{n_1}| < M.$$

已知对于 $\epsilon > 0$ 和 M , 有 k , 使 $k\epsilon > M$, 由此构成矛盾。

5 I 与 II 独立

众所周知, 有理数集构成的有序域不满足 I 而满足 II。

又, 王成堂教授^[1]所定义的广义数集合也构成有序域, 该有序域满足 I 而不满足 II。

证明如下:

设 $\{x_n\}$ 为广义数序列, 其中

$$x_n = \sum_k x_{n,k} \times 1_{(k)}.$$

又设 $\{x_n\}$ 为基本序列, 即对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N , 当 $n_1, n_2 > N$ 时, $|x_{n_2} - x_{n_1}| < \epsilon$. 特别地, 取 $\epsilon_m = 1_{(m)}$, 则有相应的 N_m , 使当 $n_1, n_2 > N_m$ 时, $|x_{n_2} - x_{n_1}| < 1_{(m)}$, 此时, 对于所有的 $k < m$, $x_{n_1,k} = x_{n_2,k} = \xi_k$. 据此构成广义数

$$\xi = \sum_k \xi_k \times 1_{(k)},$$

则对于任意的 $\epsilon > 0$, 若 $\epsilon > 1_{(m)}$, 取 N_{m+1} , 当 $n > N_{m+1}$ 时, 恒有

$$|x_n - \xi| < 1_{(m)} < \epsilon.$$

故知 $\{x_n\}$ 收敛。从而, 广义数集合满足 I。

任何自然数小于 $1_{(-1)}$, 从而广义数集合不满足 II。

因此, II 不是 I 的推论, I 也不是 II 的推论; I 不是 I 的推论, I 也不 II 的推论。

参 考 文 献

- 1 王成堂. 广义数及其应用(I). 中国科学·数学专辑(I), 1979, 1~11

On Principles of the Continuity of the Real Number System

Wang Naixin

(Computer Centre, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract The principles of the continuity of the real number system are divided in to three groups, and proves that all the principles in each group are equivalent to each other and that the principles in Group I are equivalent to the combined principles from Group II and Group III, while the principles in Group II and Group III are independent of one another.

Key words Real number, real analysis, continuity, principle