41-46

第21卷 第3期
1993年7月

西北农业大学学报
Acta Univ. Agric. Boreali-occidentalis

Vol. 21 No. 3
Jul. 1993

活塞裙部外形轮廓误差的评定

黄荣瑛 王乃信 杨 青
(西北农业大学农工系,陕西杨陵·712100)

摘 要 提出了用矩法原理与单纯形优选法评定活塞裙部横截面轮廓误差的方法,建立了横截面轮廓误差评定的数学模型;根据测量数据满足小偏差与小误差假设的条件,应用最小二乘原理建立了活塞纵向轮廓多项式拟合的数学模型,并应用微机辅助测试系统进行了实验分析。

关键词 活塞裙部,最小二乘原理,误差,测量
中图分类号 U464.133.1, TH161.12, TB921

高速、重载、低耗汽车的迅速发展,对活塞的制造、加工提出了愈来愈高的精度要求。研究指出[1],活塞裙部外形轮廓形状与加工精度、不仅影响发动机的使用性能,而且影响燃料消耗及噪音大小。因此,测量与评定活塞裙部外形轮廓误差就更为重要。本文依据95系列活塞裙部设计的数学模型,提出了应用矩法原理与单纯形优选法,建立评定横截面轮廓(以下简称横向轮廓)的数学模型;应用最小二乘原理建立纵截面轮廓(以下简称纵向轮廓)多项式拟合的数学模型。对活塞裙部轮廓误差评定的新方法作了有益的探讨。

1 活塞裙部设计数学模型

15PS.95系列柴油机活塞裙部横向轮廓工程上称一次近似椭圆轮廓[3],纵向轮廓为多项式曲线[3],其数学模型是:

一次近似椭圆轮廓

$$\Delta = \frac{D_1 - D_2}{4}(1 - \cos 2\alpha) \tag{1}$$

其中 Δ——径向缩减量;α——线轮廓形成角;D_1——长轴直径;D_2——短轴直径。

多项式曲线

$$\Delta R_h = \sum_{i=0}^{m} a^i h^i \tag{2}$$

其中 ΔR_h——沿裙部高度的径向缩减量;h——裙部高度。

2 横向轮廓误差评定数学模型

由附图可见:由于测量中心与理想中心不重合,实际轮廓长轴方向与坐标轴正向不重合,因此,实际轮廓曲线呈多维隐函数关系。

$$\vec{r}_i = \vec{e} + \vec{r}_{ai} \tag{3}$$

收稿日期:1992-03-14.

因为 $\vec{r}_i(r_i,\theta_i)$、$\vec{e}(e,\alpha)$

由设计数学模型(1)即有

$$r_{ci}=\frac{D_1}{2}-\frac{D_1-D_2}{4}[1-\cos(\theta_{ci}-\beta)]+\delta_i \tag{4}$$

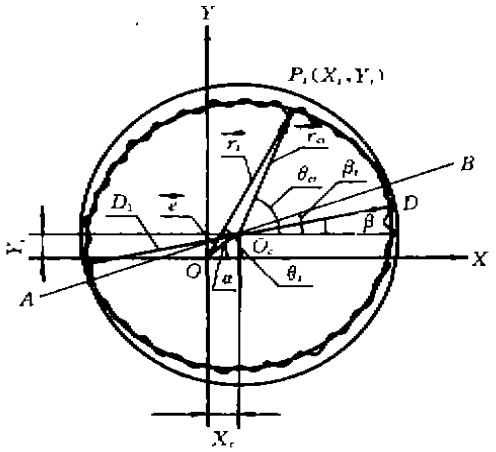
其中 θ_{ci}——相对于理想中心的形成角；

δ_i——实际轮廓矢径与理想轮廓矢径的偏差量

若令 $R_1=\frac{D_1}{2}$，$G_i=D_1-D_2$

则有 $\vec{r}_{ci}\{R_1G_i/4[1-\cos2(\theta_{ci}-\beta)]+\delta_i,\theta_{ci}\}$

即有 $\vec{r}_i(\theta_i)=f(\theta_i,e,\alpha,\beta,R_1,G_i)$ (5)



附图 裙部横向轮廓

O——测量中心；O_c——理想中心；

$\overline{O_cD}$——实际轮廓的长轴方向

除形成角 θ_i 是常变量外，其余(e,α,β,R_1,G_i)为评定横向轮廓误差中的待定参数，模型(5)属五维参变量求解问题。对此，作者应用矩法原理、传统的最小二乘原理和单纯形优选法提出了两种求解模型(5)的方法，简述于下。

2.1 矩法原理评定横向轮廓误差

2.1.1 求解理想轮廓中心的数学模型

模型(5)中的理想中心参数(e,α)应用平面轮廓面质心原理求解。若把实际轮廓视作均质面轮廓，由于轮廓中心 O_c 与测量中心 O 不重合，在重力集中于质心时，重力对测量中心 O 产生力矩，力矩的大小取决于偏离参数 $\vec{e}(e,\alpha)$，据此，可分离出参数 $\vec{e}(e,\alpha)$。

如附图所示，在坐标系 XOY 中，若 $O_c(x_c,y_c)$ 则有：理想中心数学模型

$$x_c=\frac{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}r_i^3\cos\theta_i}{\sum_{i=1}^{n}r_i^2} \tag{6}$$

$$y_c=\frac{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}r_i^3\sin\theta_i}{\sum_{i=1}^{n}r_i^2} \tag{7}$$

$$e=\sqrt{x_c^2+y_c^2} \tag{8}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=y_c/x_c \tag{9}$$

坐标平移变换 若实际轮廓上某点相对于理想中心 O_c 的极坐标是 $\vec{r}_{ci}(r_{ci},\theta_{ci})$

则有

$$r_{ci}=[(r_i\sin\theta_i-y_c)^2+r_i\cos\theta_i-x_c)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$\mathrm{tg}\theta_{ci}=\frac{r_i\sin\theta_i-y_c}{r_i\cos\theta_i-x_c} \tag{11}$$

$$i=1,2\cdots\cdots n$$

2.1.2　求解理想轮廓长轴位置的数学模型

作(10)、(11)式变换后，再应用转动惯量原理获得实际轮廓长轴位置参数 β. 若仍把实际轮廓视作均质面轮廓，实际轮廓对过理想中心 O_c 的轴$\overline{AB}$的转动惯量将因轴$\overline{AB}$与坐标系夹角 β_r 不同而异(附图)，根据二阶矩原理(即转动惯量原理)，仅当轴$\overline{AB}$与实际轮廓长轴位置重合时，转动惯量为最小。

若
$$J_\beta = \min J_{\beta r}$$

即有
$$\beta = \beta_r = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sum_{i=1}^{n} r_{ci}^4 \cdot \Delta\theta_{ci} \cdot \sin 2\theta_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} r_{ci}^4 \cdot \Delta\theta_{ci} \cdot \cos 2\theta_{ci}} \tag{12}$$

其中
$$\Delta\theta_{ci} = \frac{\theta_{c(i+1)} - \theta_{c(i-1)}}{2} \tag{13}$$
$$i = 1, 2, \cdots\cdots n$$

2.1.3　最小二乘法求解长轴与长、短轴差的数学模型

若作坐标旋转变换
$$\theta_{\beta i} = \theta_{ci} - \beta \tag{14}$$

则有理想轮廓模型
$$R_i = R_1 - G_i/4(1 - \cos 2\theta_{\beta i}) \tag{15}$$

若令
$$W_i = -\frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta_{\beta i})$$

根据最小二乘原理，目标函数是
$$ST = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [r_{ci} - (R_1 + G_i W_i)]^2 \tag{16}$$

欲使
$$Q = \min ST \tag{17}$$

则有
$$\frac{\partial ST}{\partial R_1} = 0 \tag{18}$$
$$\frac{\partial ST}{\partial G_i} = 0 \tag{19}$$

即有
$$R_1 = \overline{r_c} - G_i \overline{W} \tag{20}$$
$$G_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i r_{ci} - \overline{r_c} \sum_{i=1}^{n} W_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i^2 - \overline{W} \sum_{i=1}^{n} W_i} \tag{21}$$

其中
$$\overline{r_c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ci}; \quad \overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

2.1.4　评定横向轮廓误差的数学模型

活塞裙部横向轮廓误差评定仍属于最小二乘法。在误差评定中引入绝对误差的概念。误差为包络实际轮廓的等距区域，区域宽度等于最大绝对误差减最小绝对误差的差值。

若令
$$\max E = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} [r_{ci} - (R_1 + G_i W_i)] \tag{22}$$
$$\min E = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} [r_{ci} - (R_1 + G_i W_i)] \tag{23}$$

即有裙部横向轮廓误差
$$F = \max E - \min E \tag{24}$$

2.2　单纯形优选法评定横向轮廓误差

应用(6)～(9)式求得测量中心相对于理想中心 O_c 的偏移量 $\vec{e}(e, \alpha)$ 后，横向轮廓误差评定模型转化为仅含(β、R_1、G_i)的三维变量的模型。但由于其数学模型仍表现为超越函

数，不能直接用最小二乘法的正规方程组求解，为此，引入单纯形优选法[4]求三维变量的最优解。

2.3 单纯形优选法求解理想横向轮廓的数学模型

1）求解理想横向轮廓的目标函数　由(10)，(11)式求得$\overline{r_{ci}}(r_{ci},\theta_{ci})$后，应用最小二乘原理，即有目标函数

$$ST=\sum_{i=1}^{n}\{r_{ci}-[R_1-\frac{G_i}{4}(1-\cos 2(\theta_{ci}-\beta))]\}^2 \tag{25}$$

令
$$x_1=R_1 \quad x_2=G_i \quad x_3=\beta$$
有
$$\vec{x}=[x_1,x_2,x_3]^T$$
即有
$$ST=f(\vec{X}) \tag{26}$$

2）收敛检验准则　单纯形优选法随着迭代次数的增加，函数值向最小值趋近，其收敛准则是以单纯形各顶点相对于形心点函数值的几何均值为基础的。即有收敛检验准则是

$$N_p\leqslant 100 \tag{27}$$

$$f(\vec{X}_l)^{(k)}\leqslant f(\vec{X}_l)^{(k-1)} \tag{28}$$

$$\{\frac{1}{n+1}\sum_{z=1}^{n+1}[f(\vec{X}_z)^{(k)}-f(\vec{X}_c)^{(k)}]^2\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{29}$$

选取
$$\varepsilon=10^{-4}\sim 10^{-8}$$

其中　N_p——实际迭代次数；

$f(\vec{X}_l)^{(k)}$——第k次迭代中的最好点的函数值；

$f(\vec{X}_c)^{(k)}$——第k次迭代中形心点的函数值；

$(n+1)$——单纯形的顶点数。

在满足上述收敛准则时，得到最优解是

$$\vec{X}=\vec{X}_l \text{ 或 } \vec{X}=\vec{X}_c$$

单纯形优选法评定活塞裙部横向轮廓误差仍按(22)～(24)式。

3 活塞裙部纵向轮廓拟合模型

活塞温度场分布[2]及裙部磨损实验分析[3]研究指出，沿裙部高度方向温度场及机械应力分布不均匀，导致热变形与机械变形梯度变化，其靠近活塞顶部梯度最大，其底部较小，为使活塞处处磨损均匀，将裙部纵向轮廓设计成中凸曲线，即为抛物线（平方抛物线、立方抛物线或二者的组合形式）及多项式曲线。

依据15PS，95系列活塞裙部纵向轮廓多项式规律设计模型，建立多项式拟合数学模型

$$\Delta R_i=a_0+a_1h_i+a_2h_i^2+\cdots\cdots+a_mh_i^m \tag{30}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}a_jh_i^j$$

且$m\leqslant 5$；$j=0,1,\cdots\cdots m$；$i=1,2,\cdots\cdots n$

其中　a_j——待定参数；ΔR_i——对应高度h_i的径向减小量。

3.1 系数矩阵数学模型

裙部纵向轮廓的测量是在由光学仪器大型工具显微镜、DGF-5 型电感式测微仪组成的微型计算机辅助测量系统实现的。在测量过程中，符合小偏差与小误差假设条件，因此应用最小二乘原理，即有目标函数

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (\Delta R_{pi} - \Delta R_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\Delta R_{pi} - \sum_{j=0}^{m} a_j h_i^j)^2 \tag{31}$$

其中　ΔR_{pi}——实际测量值

设　$Q(a_0, a_1 \cdots\cdots a_m) = \min Q$　(32)

则

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 0 \quad k = 0, 1, \cdots\cdots m \tag{33}$$

即

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} h_i^{j+k} - \sum_{i=1}^{n} \Delta R_{pi} h_i^k = 0 \tag{34}$$

令

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^{j+k} = S_{j+k} \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta R_{pi} h_i = t_k \tag{36}$$

即有

$$\sum_{j=0}^{m} a_j S_{j+k} - t_k = 0 \tag{37}$$

亦即

$$\sum_{j=0}^{m} a_j S_{j+k} = t_k \tag{38}$$

$$k = 0, 1 \cdots\cdots m$$

把(38)式写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & \cdots & s_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}$$

若令

$$A = [a_0 a_1 \cdots\cdots a_m]^T$$

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & & & s_{2m} \end{bmatrix}$$

$$T = [t_0 t_1 \cdots\cdots t_m]^T$$

则有系数矩阵

$$AS = T \tag{39}$$

3.2 求解系数矩阵的步骤

系数矩阵 A 应用高斯消去法求解，主要为消元与回代两个过程。消元过程是把矩阵 S

化成同解的三角矩阵，然后按相反顺序回代求解三角矩阵，完成回代过程，得到系数矩阵A. 消元过程选用列主消元法，主要步骤是：

1)消元过程 ①构造增广矩阵；②选主元；③构造下三角矩阵；④判断是否完全构成三角矩阵，是：转2)，否：转回②。

2)回代过程 按相反顺序回代。

4 分析与结论

将上述讨论的活塞裙部横向轮廓误差评定模型及纵向轮廓拟合模型应用于微型计算机辅助测量系统，通过测量实验得到以下结论：

1)本研究建立的裙部横向轮廓误差评定模型与纵向轮廓曲线拟合模型，经编程运算表明模型稳定，重复性好。因此，本研究为活塞生产检测提供了一种简单、可靠的方法。

2)依据最小二乘原理建立的活塞裙部纵向轮廓多项式拟合模型，在满足 $m \leqslant 5$ 的条件时，拟合精度高，达到99%的显著水平；就拟合误差而言，三次多项式曲线误差为最小，由此获得95系列活塞裙部纵向轮廓符合三次多项式分布规律。

参 考 文 献

1 Toshiro Yagi 著；肖秀华，王兴龙译．国外内燃机．1983；(5)：15～19

2 内燃机杂志编辑部编．内燃机结构强度研究．北京：机械工业出版社，1977：190～208

3 肖秀华．活塞裙部的外形型面．经验交流，1980；(1)：3～25

4 刘惟信，孟嗣宗．机械最优化设计．北京：清华大学出版社，1986：101～107

The Evaluation of Piston Skirt Contour Error

Huang Rongying Wang Naixin Yang Qing

(Agroengineering Department, Northwestern Agricultural University, Yangling, Shaanxi, China, 712100)

Abstract This paper suggests the evaluating cross-section contour error, the principle of moment method and single optimum seeking method. The mathematical model of a cross-section contour error evaluation was established. Based on the satisfying of the hypothessis conditions of small deviation and small error with the measured data, and also on the principle of least square method, the multinomial fitting mathematical model of longitudinal-section contour was established, and its experimental analysis was systematically made with the computer-aided measurement system.

Key words piston, skirt section, principle of least square method, error measurement