

正螺旋面展开图的几何优化设计

田志宏¹ 王乃信² 刘迎春¹

(1 西北农业大学农业工程系, 2 西北农业大学计算中心, 陕西杨陵·712100)

摘要 提出了一种正螺旋面解析设计计算方法, 按照绝对变形量和相对变形量指标为最小两类目标函数建模, 导出了在相应加工条件下的设计计算公式。实际应用结果证实了该设计思想的正确性。

关键词 螺旋面, 最优设计, 构件变形, 目标函数, 机械制图, 非可展曲面

中图分类号 TH126.1, TH132.1, TH122

正螺旋是农业机械中常用的工作部件, 可分为内螺旋和外螺旋两种型式, 多用金属材料加工而成。正螺旋面的所有素线都垂直于轴线, 是一类不可展曲面, 设计制造时都用近似方法做展开图形, 常用近似方法有三角形法、简便作图法和计算法^(1~4)。其中, 三角形法作图过程复杂、精度受限于作图精度; 简便作图法原理同计算法, 精度却低于计算法; 计算法是目前较为通用的设计方法^(5~7), 但其设计公式导出中有严格的约束条件, 设计结果不是最优设计^(3,8), 反映在加工制造过程中有相当大的变形, 实际应用时往往要对设计结果进行试验调整和修正。

针对上述问题, 本文对计算法作展开图所产生的变形进行了分析, 提出了一种比其设计制造精度高的新解析设计方法, 导出了两类加工条件下的具体设计计算公式。对若干实例的设计计算表明, 新设计方法的设计和加工制造工作量与计算法相当, 但精度指标高于目前常用设计。为节省篇幅, 文中的公式详细推导过程从略。

1 计算法及其展开图所产生的变形量

计算法对于内、外螺旋的设计完全相同, 外螺旋如图1所示。

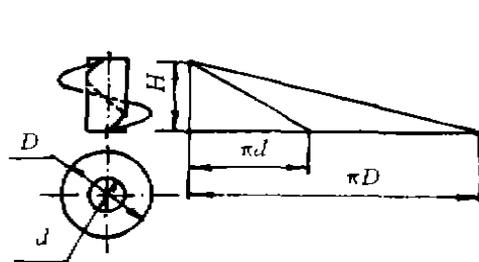


图1 螺旋设计图

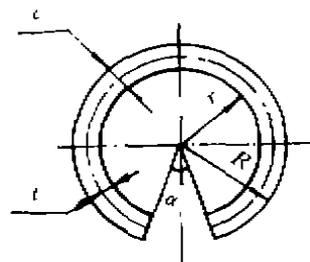


图2 正螺旋展开图

H 导程, d 内径, D 外径, c 叶片宽度, r 展开图内圆半径, R 外圆半径, α 展开图切角

$$\text{根据 } (2\pi - \alpha)(r + c) = \sqrt{\pi^2 D^2 + H^2}, (2\pi - \alpha)r = \sqrt{\pi^2 d^2 + H^2} \quad (1)$$

可得展开图设计参数

$$r = cp / (q - p), R = r + c, \alpha = 2\pi - q / (r + c) \quad (2)$$

式中 $p = \sqrt{\pi^2 d^2 + H^2}, q = \sqrt{\pi^2 D^2 + H^2}$

计算法所得螺旋叶片展开图是一带缺口圆环。事实上，将图 2 所示圆环沿轴线方向拉长 H 后，其形状尺寸与一个导程的螺旋仍有差异。具体分析如下：

螺旋叶片一般用 0.5~3mm 金属板料制作，螺旋形状的形成是依靠一定的变形实现的。由于螺旋成形中总变形量不大，并考虑到弹性材料形变的泊松比值，加工时叶片的径向变形可以忽略不计。不失一般性，我们可以对图 2 所示一个导程长的螺旋及其展开图进行讨论，展开图中半径为 $r + t$ 的圆弧线长度为 $L(t) = k(r + t)$ ， k 是一个参数。螺旋与直径为 $d + 2t$ 的假想同轴柱面的交线为一螺旋线，对应上述圆弧，长度为

$$l(t) = [\pi^2 (d + 2t)^2 + H^2]^{1/2}$$

为了描述螺旋叶片在加工中产生的绝对变形量和相对变形量，构造了两种函数

$$\Psi(t) = l(t) - L(t), \Phi(t) = L(t) / l(t) \quad (3)$$

对计算法设计所产生的变形量进行讨论。

(1) 绝对变形量

$$\Psi(t) = [\pi^2 (d + 2t)^2 + H^2]^{1/2} - k(r + t) \quad (4)$$

对于 (2) 式所得设计结果， $k = 2\pi - \alpha$ ， $\Psi(t)$ 满足 $\Psi(0) = \Psi(c) = 0$ ， t_0, t_1 分别表示变形量函数 $\Psi(t), \Phi(t) (t \in [0, c])$ 的极值点，以下均同。

令 $d\Psi(t) / dt = 0$ ，得

$$t_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{Hq}{\pi \sqrt{(2\pi R)^2 - q^2}} - d \right] \quad (5)$$

t_0 是 $t \in [0, c]$ 内唯一的极值点（极小值），其位置在叶片中部偏内圆处（图 3），且

$$\Psi(t_0) = [H \sqrt{(2\pi R)^2 - q^2} - \pi(2r - d)q] / (2\pi R) \quad (6)$$

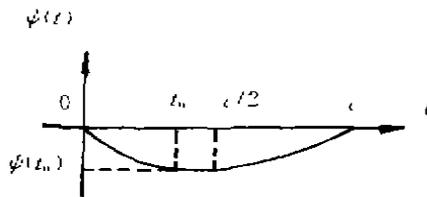


图 3 $\Psi(t) - t$ 图

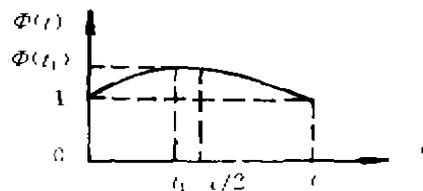


图 4 $\Phi(t) - t$ 图

(2) 相对变形量

$$\Phi(t) = k(r + t) / [\pi^2 (d + 2t)^2 + H^2]^{1/2} \quad (7)$$

它反映了螺旋由展开图成形过程中半径为 $r+t$ 的圆弧线单位长度的变形量。对于(2)式所得设计结果, $k=2\pi-\alpha$, $\Phi(c)=\Phi(0)=1$ 。由(7)式可得

令 $d\Phi(t)/dt=0$, 得

$$t_1 = \{H^2(q-p)/[\pi^2(Dp-dq)]-d\}/2 \quad (8)$$

t_1 是 $\Phi(t)$ 在 $t \in [0, c]$ 内唯一的极值点(极大值), 其位置在叶片中部偏内圆处(图4),

$$\Phi(t_1) = [\pi^2(Dp-dq)^2 + H^2(q-p)^2]^{1/2} / (2\pi cH) \quad (9)$$

总之, 按算法所设计的结果在加工制造中要产生相当大的纯压缩变形, 加工制造不容易实现, 其原因为简便地求得设计参数 R , r , α 而加的约束条件(1)。

2 正螺旋面展开图的改进设计模型 I

图1的正螺旋面对于任一 t 值($t \in [0, c]$)都是一螺旋线, 它处处具有相同的曲率。因此, 尽管由展开图形成螺旋面时肯定要发生形变, 但其展开图及实际制造的下料图样必然是一段圆环。螺旋面展开图的最优设计, 应使前述绝对变形量或相对变形量达到最小, 即选取参数 r , R , 使 $\max_{t \in [0, c]} |\Psi(t)|$ 达到最小值, 或使 $\max_{t \in [0, c]} |\ln\Phi(t)|$ 达到最小值。

2.1 按绝对变形目标设计

根据 $L(t)$, $l(t)$ 算式, 有

$$\Psi'(t) = 2\pi^2(d+2t)/[\pi^2(d+2t)^2 + H^2]^{1/2} - k$$

$$\Psi''(t) > 0$$

极值点

$$t_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{kH}{\pi\sqrt{(2\pi)^2 - k^2}} - d \right]$$

与 r 无关。为使 $\max_{t \in [0, c]} |\Psi(t)|$ 达到最小, 必须满足 $\Psi(0) = \Psi(c)$, $\Psi(0) = -\Psi(t_0)$, 可求出

$$r = \frac{1}{2k} \left[\frac{H}{2\pi} \sqrt{(2\pi)^2 - k^2} + p \right] + \frac{d}{4}, \quad k = (q-p)/c \quad (10)$$

2.2 按相对变形目标设计

$$\Phi'(t) = \frac{k[H^2 - \pi^2(2r-d)(d+2t)]}{[\sqrt{\pi^2(d+2t)^2 + H^2}]^3}$$

极值点 $t_1 = \{H^2/[\pi^2(2r-d)]-d\}/2$ 与 k 无关。为使 $\max_{t \in [0, c]} |\ln\Phi(t)|$ 达到最小, 必须满足 $\Phi(0) = \Phi(c)$; $\Phi(0) \cdot \Phi(t_0) = 1$, 可求出

$$k = \{2\pi H p r^{-1} / [\pi^2(2r-d)^2 + H^2]^{1/2}\}^{1/2}, \quad r = cp/(q-p) \quad (11)$$

与算法相比, 改进模型 I 在两种目标函数下减少了变形量(具体计算结果参见例1), 它适合于一般模压成形加工正螺旋叶片时展开图的设计。

3 正螺旋曲面展开图的改进设计模型 II

在多数情况下, 螺旋叶片加工是利用人工或机械将展开图板料直接沿轴向拉伸成

形, 此时设计制造主要关心的问题是螺旋与基圆柱的贴切以及加工中变形的大小。螺旋叶片与基圆柱贴切不好时二者之间缝隙很大, 焊接困难, 螺旋强度不足。实际加工经验也表明, 人工加工中压缩变形比拉伸变形更困难一些。

为此, 本文提出螺旋叶片展开图的改进设计模型 II, 其基本思想是在改进模型 I 中加入保证基圆柱贴切处叶片不变形条件, 使 $\max_{t \in [0, c]} |\Psi(t)|$ 达到最小值, 或 $\max_{t \in [0, c]} |\ln \Phi(t)|$ 达到最小值。该模型对内、外螺旋的设计不同, 对于外螺旋需保证 $\Psi(0) = 0$ 或 $\Phi(0) = 1$ 。

3.1 按绝对变形目标设计

为达到前述目标, 必须满足 $\Psi(0) = 0$; $\Psi(t_0) = -\Psi(c)$ 。可求得

$$k = p / r \quad (12)$$

$$r = \frac{p(d-2c)(2p-q) - \sqrt{[p(d-2c)(2p-q)]^2 - [(2p-q)^2 - H^2][p^2(2c-d)^2 + (Hp/\pi^2)]}}{2[(2p-q)^2 - H^2]} \quad (13)$$

3.2 按相对变形目标设计

为达到前述目标, 必须满足 $\Phi(0) = 1$, $\Phi(c) \cdot \Phi(t_1) = 1$ 。可求得

$$k = p / r \quad (14)$$

$$[\pi^2(2r-d)^2 + H^2]^{1/2} - 2\pi Hqr^2 / [p^2(r+c)] = 0 \quad (15)$$

用(15)式不易直接求出关于 r 的最优设计值, 但该式仅含一个变量 r , 可用一维搜索方法求得 r 的数值解。不失一般性, 本文推导出搜索区间 $r \in [cq / (q-p), p^2 / (2\pi^2 d)]$ 。

例 1 联合收割机搅龙是典型的外螺旋。已知某收割机搅龙叶片尺寸 $D = 500$ mm, $d = 300$ mm, $H = 460$ mm。用算法和本文提出的改进模型 I、II 进行计算, 结果如表 1, 2。

表 1 按绝对变形量目标设计结果

方 法	r	α	t_0	$\Psi(t_0)$	$\Psi(0)$	$\Psi(c)$
计 算 法	178.351	23° 5' 19"	44.45	-4.627	0	0
改进模型 I	177.958	23° 5' 19"	44.45	-2.314	2.314	2.314
改进模型 II	179.358	24° 58' 46"	36.15	-3.300	0	3.300

表 2 按相对变形量目标设计结果

方 法	r	α	t_1	$\Phi(t_1)$	$\Phi(0)$	$\Phi(c)$
计 算 法	178.351	23° 5' 19"	39.05	1.003 5	1	1
改进模型 I	177.351	23° 41' 30"	39.05	1.001 9	0.998 2	0.998 2
改进模型 II	179.579	25° 23' 30"	31.21	1.002 5	1	0.997 5

4 内螺旋面展开图的改进设计

对于改进模型 I, 内、外螺旋改进设计方法相同, 可直接用(10)式或(11)式按绝对变形量或相对变形量目标设计内螺旋面展开图。

对于改进模型 II, 内螺旋设计不同于外螺旋设计, 按绝对变形量或相对变形量目标

应分别保证 $\Psi(c)=0$ 或 $\Phi(c)=1$ 。本文推导出了 t_0 、 t_1 及对应于(12)~(15)式的算式。

(1)按绝对变形目标设计

$$t_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{Hk}{\pi \sqrt{(2\pi)^2 - k^2}} - d \right], \quad k = \frac{q}{k} \quad (12)'$$

$$R = \frac{q(D+2C)(2q-p) + \sqrt{[q(D+2C)(2q-p)]^2 - [(2q-p)^2 - H^2][q^2(D+2C)^2 + (qH/\pi)^2]}}{2[(2q-p)^2 - H^2]} \quad (13)'$$

(2)按相对变形目标设计

$$t_1 = \{H^2 / [\pi^2(2R-D)] - d\} / 2, \quad k = q/R \quad (14)'$$

$$[\pi^2(2R-D)^2 + H^2]^{1/2} - 2\pi HpR^2 / [q^2(R-C)] = 0 \quad (15)'$$

用一维搜索方法从(15)'求 R 值时, 搜索区间为 $R \in [q^2 / (2\pi^2 D), cq / (q-p)]$ 。

例2 收割机脱粒部分导板是内螺旋。已知某收割机 A 导板尺寸 $D = 550$ mm, $d = 470$ mm, $H = 880.4$ mm, 用计算法和改进设计模型 II 进行计算, 部分设计结果见表3。

表3 导板设计结果

方 法	R	α	t_0	t_1	$\Psi(t_0)$	$\Phi(t_1)$	$\Psi(0)$	$\Phi(0)$
计 算 法	352.360	44° 40' 5"	19.40	18.80	-1.006	1.000 6	0	1
绝对变形目标	351.269	43° 41' 21"	22.84	—	-0.683	—	0.683	—
相对变形目标	351.321	43° 44' 8"	—	22.25	—	1.000 4	—	0.999 6

5 对实际应用的两点讨论

5.1 任意长度正螺旋展开图设计

实际应用中往往是任意长度的螺旋设计, 这实质是在前面探讨的一个导程正螺旋展开图基础上的切角问题。设所求正螺旋长度为 S , 展开图扇形角为 K , 且 $S = mH$, m 为任意正数。 $m = 1$ 即前所述, 农业机械设计中多数有 $m > 1$ 。任意长度正螺旋面展开图设计参数可以很方便地从前述 $m = 1$ 的设计公式求得。

m 为任意正数时, R 或 r 计算公式同(10)、(11)、(13)、(15)、(13)'、(15)'等式; $m \neq 1$ 时, 展开图扇形角 K 可由公式(10)、(11)、(12)、(14)、(12)'、(14)'中的 k 值求得, $K = Sk / H = mk$ 。分两种情况

(1) $K < 2\pi$ 时, 展开图切角为 $2\pi - K$, 展开图形为一部分圆环;

(2) $K \geq 2\pi$ 时, 展开图可由 $INT(K/2\pi)$ 个切角为零的整圆环和一个切角为 $K - [INT(K/2\pi)]$ 的部分圆环组成。这样可节省材料, 且焊缝不在同一平面内, 增大了螺旋工作的平稳性。只是切角为零的圆环对应的螺旋长度大于 H , 其最大绝对变形量

$\max_{t \in [0, c]} \Psi(t)$ 要大于 $m = 1$ 的情形。

5.2 实际加工中正螺旋基圆柱的加工精度

这也是影响变形量的一个重要因素, 它作用的实质是基本设计参数 d (D) 的变化, 根据加工条件提出适当的误差允许范围是非常必要的。

本文得到李飞雄教授, 祝永昌、邵维民、穆浩民副教授, 陈铮高级工程师, 以及农机工厂李清贵、吕学平师傅的指导和帮助, 一并致谢。

参 考 文 献

- 1 武汉水电学院. 工程曲面的几何计算与展开. 北京: 水利出版社, 1980: 58~78
- 2 山东工学院. 曲面制图. 济南: 山东科技出版社, 1979: 45~69
- 3 朱 辉, 曹 枕, 张士良编著. 高等画法几何学. 上海: 上海科技出版社, 1985: 350~362
- 4 (苏) H. Ф. 切特维鲁新编, 梁升照译. 画法几何学. 北京: 高等教育出版社, 1982: 125~160
- 5 中国农机化科学研究院. 农业机械设计手册. 北京: 机械工业出版社, 1974: 96~99
- 6 张兰星, 何月娥. 谷物收割机械理论与计算. 长春: 吉林人民出版社, 1980: 160~185
- 7 孟宪铎. 解析画法几何. 北京: 机械工业出版社, 1984: 356~365
- 8 (苏) С. А. 弗罗洛夫著; 北京工业学院译. 画法几何学. 北京: 高等教育出版社, 1983: 39~73

Geometric Optimum Design of Developed View of Ordinary Helicoidal Surface

Tian Zhihong Wang Naixin Liu Yingchun

(Department of Agricultural Engineering, Northwest Agricultural University, Yangling, Shaanxi, 712100)

Abstract This paper suggests a kind of analytical method of design calculation of ordinary helicoidal surface. The models are established in accordance with the absolute and relative deformation indexes as the minimum objective functions of two groups, thereby to obtain the design calculation formulas under the processing conditions of two groups. The practical applications also confirm the correctness of design concepts.

Key words helicoidal surface, optimum design, deformation of member, objective function, mechanical drawing, non-developable surfaces