第18卷第3期　　西北农业大学学报　　Vol.18 No.3
1990年9月　　Acta Univ.Agric.Boreali-occidentalis　　Sept. 1990

关于机械传动效率的研究

蒋　钧

（甘肃农业大学）

摘　要　对广义传动比提出新的定义概念，并用π及π^0表示。导出了机械传动效率的普遍式$\eta_{ab}=\frac{\pi^0_{ab}}{\pi_{ab}}$。用此公式对齿轮啮合进行研究，得到输出功A的表示式

$$A=T_a\int_A^R\left[1-\left(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b}\right)\cdot\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)}\cdot 1\right]d\varphi_a$$

关键词　机械传动，传动比，广义传动比，平动构件转动化，转动构件平动化，速度π量，等力理想机构

1　广义传动比π及π^0

通常传动比i_{ab}被定义为作相对转动的两构件a,b的角速度之比：$i_{ab}=\frac{\omega_a}{\omega_b}$[1]　在进行机器动力学分析时，常用到形如$\frac{\omega_a}{\omega_b}$，$\frac{v_a}{\omega_b}$等比式，这是分别作转动或平动的两个构件$a$，$b$其角速度和速度的比式，它们的量纲是长度或长度的倒数。

在SI标准中有关的力学量纲如下表：

名称	单　位	符　号	量　纲	计算式或说明
速度	m/s	v	LT^{-1}	
力	（牛顿）N $Kg\cdot m/s^2$	F	LMT^{-2}	
角速度	$1/s$	ω	T^{-1}	
功率	J/s w $Kg\cdot m^2/s^3$	P	ML^2T^{-3}	$P=W/t=V\cdot F=\omega\cdot T$（此式中$T$为转矩）

根据量纲分析的基本原理，可使$\frac{v_a}{\omega_b}$或$\frac{\omega_a}{v_b}$无量纲化，用无量纲符号π表示二者之比。以$\frac{v_a}{\omega_b}$为例，设有某量纲X，为使$\frac{v_a}{\omega_b}$无量纲化，作运算$\frac{v_a}{\omega_b\cdot X_1}=\pi_{ab}$或$\frac{v_a\cdot X_2}{\omega_b}=\pi_{ab}$。把$\pi_{ab}$称为广义传动比。略去$\pi_{ab}$，$v$，$\omega$的数值意义，只计其量纲，并记之为〔$\pi_{ab}$〕，〔$v$〕，〔$\omega$〕，作量纲计算时有下式成立：

文稿收到日期：1989－09－01。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left[\pi_{ab}\right]=\frac{[v_a]}{[\omega_b]\cdot X_1}=\frac{LT^{-1}}{T^{-1}\cdot X_1} \tag{1}$$

$$\left[\pi_{ab}\right]=\frac{[v_a]\cdot X_2}{[\omega_b]}=\frac{LT^{-1}\cdot X_2}{T^{-1}} \tag{2}$$

从（1）（2）式分别解出 $X_1=L$ $X_2=L^{-1}$。

（1）式中的$[\omega_b]\cdot X_1$，其物理过程是在转动构件上找一个参考点，使其线速度的数值与角速度ω_b的数值相同，该点的回转半径为单位长度。这是把转动构件平动化，其结果是使比式$\frac{v_a}{\omega_b}$中的ω_b转化成参考点上的线速度，从而使$\frac{v_a}{\omega_b}$无量纲化。（2）式中的$[v_a]\cdot X_2$与$[\omega_b]\cdot X_1$类似，它是把平动构件转化，同样使$\frac{v_a}{\omega_b}$无量化纲化。这时的π_{ab}，可看作是作相对平动的两构件速度之比或作相对转动的两构件角速度之比。略去比式$\frac{v_a}{\omega_b}$的量纲意义不计，广义传动比π_{ab}的数值意义是作相对运动的两构件速率之比。对于形如$\frac{\omega_a}{v_b}$的处理过程及意义，与$\frac{v_a}{\omega_b}$相同。

由前文π_{ab}的概念可知，对于两平动构件有$\pi_{ab}=\frac{v_a}{v_b}$；对于两转动构件有$\pi_{ab}=\frac{\omega_a}{\omega_b}$。这里的平动构件转动化或转动构件平动化，不是通常含义的转化构件，它不涉及能量问题，而转化构件是以机械能相等为基础的一个概念。

有时还用到两个作相对运动构件的加速度a与角加速度ε的比式$\frac{a_1}{\varepsilon_1}$或$\frac{\varepsilon_1}{a_1}$，也用到线位移$S$与角位移$\theta$的比式$\frac{S_a}{\theta_b}$或$\frac{\theta_a}{S_b}$等等。按照上面的处理办法，都可以使这些比式成为无量纲的π量。本文都称之为广义传动比。为了把加速度、速度、位移所对应的广义传动比在符号上相互区别，分别记为π_a，π_v及π_s。它们的含义和物理过程可以统用下面公式表达。

$$\pi_{a1_1}=\frac{a_1\cdot x_1}{\varepsilon_1}=\frac{a_1}{\varepsilon_1\cdot x_2}=\frac{\varepsilon_1\cdot x_3}{a_1}=\frac{\varepsilon_1}{a_1\cdot x_4}=\frac{a_1}{a_1}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \tag{3}$$

$$\pi_{vab}=\frac{v_a\cdot y_1}{\omega_b}=\frac{v_a}{\omega_b\cdot y_2}=\frac{\omega_a\cdot y_3}{v_b}=\frac{\omega_a}{v_b\cdot y_4}=\frac{v_a}{v_b}=\frac{\omega_a}{\omega_b} \tag{4}$$

$$\pi_{sab}=\frac{S_a\cdot z_1}{\theta_b}=\frac{S_a}{\theta_b\cdot z_2}=\frac{\theta_a\cdot z_3}{S_b}=\frac{\theta_a}{S_b\cdot z_4}=\frac{S_a}{S_b}=\frac{\theta_a}{\theta_b} \tag{5}$$

式中$x_1,x_2\cdots x_4,y_1,y_2\cdots y_4,z_1,z_2\cdots z_4$均为待求量纲。不难理解，当定义了广义传动比的概念之后，把传统传动比概念的含义大大地拓宽了：（1）原概念只涉及两构件作相对转动，现在可包括平动→转动、转动→平动、平动→平动、转动→转动四种状态；（2）原概念只讨论转动角速度，现在可讨论速度、加速度、角加速度、线位移、

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

角位移等运动量。可分别称它们为速度π量(π_v)、加速度π量(π_a)和位移π量(π_s)。π_{ab}的定义可叙述为：同一机械上任意两个作相对运动的构件，其对应的运动量或与某单位量纲作用后的运动量的比式，所得的无量纲比率称为广义传动比，用π表示。

之所以选用π作为广义传动比的代表符号而不用传统的i，是出于下列考虑：(1)为了在概念上与传统的传动比相区别；(2)在作广义传动比计算时，要用到无量纲积定理，即π定理；(3)目前除了圆周率用π表示外，在SI标准和GB标准中，均未规定π的其它专门用途。还有其它一些考虑。

2　机械传动效率的普遍式

设某机构主动件以速度v_a，动力F_a作功率输入，从动件以速度v_b，动力F_b作功率输出，分别用p_a与p_b表示。根据机械效率定义有：

$$\eta_{ab}=\frac{P_b}{P_a}=\frac{F_b v_b}{F_a\cdot v_a} \tag{6}$$

设存在一个与原机构结构相同，但无摩擦损失的机构，该机构的功率输入与原机构的完全相同，输出动力亦与原机构的相等，仅仅动力的输出速度与原机构不同，设其为v_b^0。称这个机构为原机构的等力理想机构。“等力”的含义是两个机构的输入、输出动力相等。“理想”的含义是不存在摩擦损失。由此可得：

$$v_a\cdot F_a=v_b^0\cdot F_b \tag{7}$$

从(7)式得到$F_b=\dfrac{v_a\cdot F_a}{v_b^0}$代入(6)式可得：

$$\eta_{ab}=\frac{v_b}{v_b^0} \tag{A}$$

若某机构的主动件以速度v_a，动力F_a作功率输入，动力输出的从动件以角速度为ω_b，动力矩T_b作转动，根据效率的定义有：

$$\eta_{ab}=\frac{P_b}{P_a}=\frac{T_b\cdot\omega_b}{F_a\cdot v_a} \tag{8}$$

该机构的等力理想机构动力输出的角速度为$\omega_b{}^0$，仿照上面的推导，不难得到：

$$\eta_{ab}=\frac{\omega_b}{\omega_b{}^0} \tag{B}$$

从(A)，(B)两式可以看出，机械效率可用实际机构的动力输出速度或角速度与它的等力理想机构的动力输出速度或角速度的比率表示。如果假设功率输入的主动件为转动，功率输出的从动件作平动或转动，都可以得到(A)，(B)两式。对(A)，(B)两式作变换：

$$\eta_{ab}=\frac{v_b}{v_b^0}\cdot\frac{v_a}{v_a}=\frac{v_a/v_b{}^0}{v_a/v_b} \tag{9}$$

$$\eta_{ab}=\frac{v_b}{v_b^0}\cdot\frac{\omega_a\cdot X}{\omega_a\cdot X}=\frac{\omega_a\cdot X/v_b{}^0}{\omega_a\cdot X/v_b} \tag{10}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\eta_{ab}=\frac{\omega_b}{\omega_b^0}\cdot\frac{v_a\cdot X}{v_a\cdot X}=\frac{v_a\cdot X/\omega_b^0}{v_a\cdot X/\omega_b} \tag{11}$$

$$\eta_{ab}=\frac{\omega_b}{\omega_b^0}\cdot\frac{\omega_a}{\omega_a}=\frac{\omega_a/\omega_b^0}{\omega_a/\omega_b} \tag{12}$$

式中X为某单位量纲。把等力理想机构的广义传动比用π_{ab}^0表示，根据前文所述广义传动比的定义，综合（9）～（12）式可得到：

$$\eta_{ab}=\frac{\pi_{ab}^0}{\pi_{ab}} \tag{C}$$

式中π_{ab}是实际机构广义传动比。式（C）表明：机械效率可用等力理想机构的广义传动比与实际机构的广义传动比之比表示。式（C）不是在某个特定的机构上导出的，它适用于任何类型、任何复杂程度的机械其机械传动效率的计算，所以说它是机械传动效率的普遍式。

3 轮系的机械效率

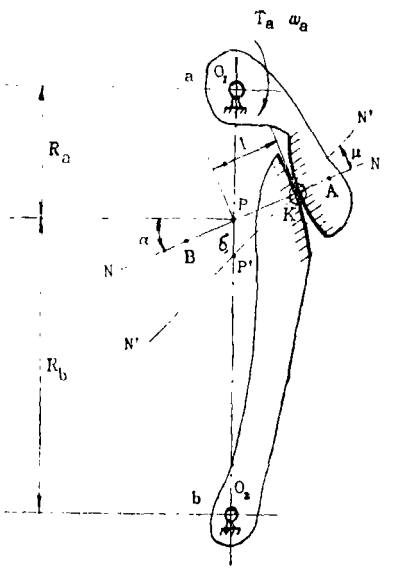

图1

μ——摩擦角；α——啮合角；P——节点；R_a，R_b——两轮节圆半径，$R_a<R_b$

机械传动效率普遍式（C）的应用，关键在于求出π_{ab}^0及π_{ab}，下面以结构和计算都较复杂的轮系为例，说明这个公式的用法。

3.1 一对定轴齿轮齿廓啮合的传动效率

设一对外啮合齿廓在K点啮合，如图1所示。在不计摩擦的理想状态下，根据Willis定理有：

$$\pi_{ab}^0=\frac{R_b}{R_a} \tag{13}$$

实际上由于摩擦力的存在，使动力作用线由NN偏转了一个角μ而到$N'N'$位置，P点也移动一个距离δ而到P'，实际机构的广义传动比为

$$\pi_{ab}=\frac{R_b\pm\delta}{R_a\mp\delta} \tag{14}$$

式中$\delta=PP'$，其前面的±号视a，b齿轮哪个为主动而定。根据式（C）有$\eta_{ab}=\frac{\pi_{ab}^0}{\pi_{ab}}=$

$\frac{R_b/R_a}{(R_b\pm\delta)/(R_a\pm\delta)}=\frac{1\pm\delta/R_a}{1\pm\delta/R_b}$。因为$\eta_{ab}<1$，且$R_a<R_b$，故只能有：

$$\eta_{ab}=\frac{1-\delta/R_a}{1+\delta/R_b} \tag{15}$$

将式（15）用泰勒级数展开并舍去高阶无穷小项后得到：

$$\eta_{ab}=\frac{1-\delta/R_a}{1+\delta/R_b}\approx(1-\delta/R_a)\ (1-\delta/R_b)\approx 1-\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}\right)\cdot\delta \tag{16}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对于一对内啮合齿轮，设$R_a<R_b$，不难推出：

$$\eta_{ab}=1-\left(\frac{1}{R_a}-\frac{1}{R_b}\right)\cdot\delta \tag{17}$$

综合（16）（17）式得到：

$$\eta_{ab}=1-\left(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b}\right)\cdot\delta \tag{D}$$

在图1中，设$KP=l$，则$\angle KPP'=90^\circ+\alpha$，$\angle PP'K=90^\circ-(\alpha+\mu)$，对于$\triangle PP'K$依正弦定理有$\frac{\delta}{\sin\mu}=\frac{l}{\sin\angle PP'K}=\frac{l}{\cos(\alpha+\mu)}$，从此式可求得$\delta=\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)}\cdot l$。

将此结果代入式（D）得到：

$$\eta_{ab}=1-\left(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b}\right)\cdot\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)}\cdot l \tag{E}$$

（D）（E）式都是由$\eta_{ab}=\frac{\pi^0_{ab}}{\pi_{ab}}$导出的一对齿廓传动效率表达式。

3.2　轮系K-H-V机构的效率

图2所示为一个K-H-V机构运动简图。齿轮a,b的齿数Z_a，Z_b及转化机构的效率η_{ab}^H均为已知，求传动效率η_{VH}。

由图可知$\omega_V=\omega_a$，所以$\pi_{VH}=\pi_{aH}$。由于齿圈b固定，记之为π^b_{aH}。由公式(C)得：

$\eta_{VH}=\frac{\pi^0_{VH}}{\pi_{VH}}=\frac{\pi^{0b}_{aH}}{\pi^b_{aH}}$由轮系求传动比的法则得到：

$\eta_{VH}=\frac{1-\pi^{0H}_{ab}}{1-\pi^H_{ab}}$，将式（13）（14）代入

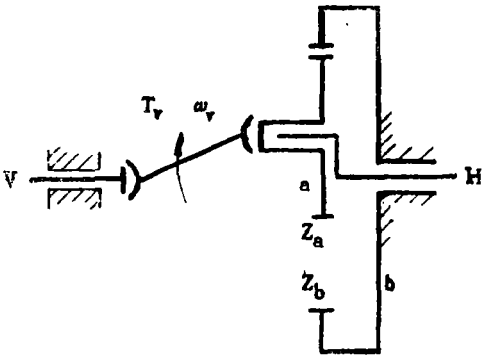

图2

此式并化简得

$\eta_{VH}=\frac{1-R_b/R_a}{1-(R_b\pm\delta)/(R_a\mp\delta)}=1\pm\delta/R_a$，由于$\eta_{VH}<1$，故只能有：

$$\eta_{VH}=1-\delta/R_a \tag{18}$$

从（17）式解出$\delta=(1-\eta^H_{ab})\cdot\frac{R_a\cdot R_b}{R_b-R_a}$，代入（18）式得到

$\eta_{VH}=1-\frac{1}{R_a}\cdot\frac{R_a\cdot R_b}{R_b-R_a}(1-\eta^H_{ab})=1-\frac{R_b}{R_b-R_a}(1-\eta^H_{ab})$。最后把$R_a$，$R_b$用齿轮

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的模数m与齿数z_a，z_b代入上式并化简后得到：

$$\eta_{VH}=1-\frac{z_b}{z_b-z_a}\left(1-\eta^{H}_{ab}\right) \tag{19}$$

由于用啮合功率法计算η_{VH}的计算条件与公式（C）的导出条件一致，当用啮合功率法对此例进行计算后，仍得到式（19）的结果。

3.3 ZK-H正号行星轮系效率

这是资料[2]的一个例题。图3所示为一个ZK-H正号行星机构。已知$Z_a=99$，$Z_g=Z_{g'}=25$，$Z_b=100$，系杆H为主动件，转化机构效率$\eta^{H}_{ba}=0.98$，求η^{b}_{Ha}。

由式（C）可有$\eta^{b}_{Ha}=\dfrac{\pi^{0b}_{Ha}}{\pi^{b}_{Hb}}$，由轮系求传动比法则得：

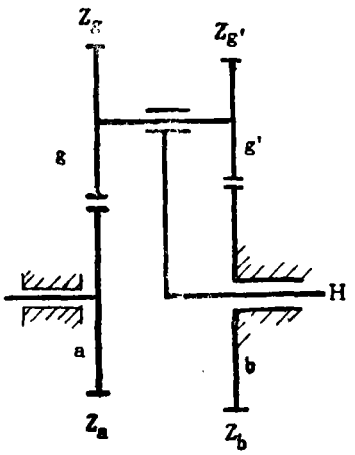

图 3

$$\eta^{b}_{Ha}=\frac{\pi^{0b}_{Ha}}{\pi^{b}_{Hb}}=\frac{\pi^{b}_{aH}}{\pi^{0b}_{aH}}=\frac{1-\pi^{H}_{ab}}{1-\pi^{0H}_{ba}} \tag{20}$$

及

$$\eta^{H}_{ba}=\frac{\pi^{0H}_{ba}}{\pi^{H}_{ba}}=\frac{\pi^{H}_{ab}}{\pi^{0H}_{ab}} \tag{21}$$

从式（21）得到 $\pi^{0H}_{ab}=\dfrac{\pi^{H}_{ab}}{\eta^{H}_{ba}}$，将此结果代入（20）式后得

$$\eta^{b}_{Ha}=\frac{1-\pi^{H}_{ab}}{1-\dfrac{\pi^{H}_{ab}}{\eta^{H}_{ab}}} \tag{22}$$

式中 $\pi^{H}_{ab}=\dfrac{Z_a}{Z_b}=\dfrac{100}{99}$，$\eta^{H}_{ba}=0.98=\dfrac{98}{100}$，代入（22）后得到：

$$\eta^{b}_{Ha}=\frac{1-\dfrac{100}{99}}{1-\dfrac{100}{99}\times\dfrac{100}{98}}=0329$$

。资料[2]的例题是用啮合功率法算的，其结果也是

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\eta^{b}_{H_a}=0.329$.

4 讨 论

（1）由于普遍式（C）的导出是在只计算机构的摩擦损失条件下完成，所以与只计及摩擦损失的其它方法计算的结果应该相同。

（2）普遍式 $\eta=\frac{\pi^0}{\pi}$ 形式简单，计算也不麻烦，在复杂轮系的效率计算中，它省去了功率流动方向指数 β 及工作状态指数 γ，这对求算封闭轮系的效率特别有利。

（3）　仔细分析公式（D），看到它与кудрявчев公式：

$$\eta=1-f\cdot\mu\left(\frac{1}{z_a}\pm\frac{1}{z_b}\right) \tag{23}$$

的形式相似。式中μ是摩擦系数，一般取0.06～0.1. f 是与齿顶高系数 h_a^* 有关的系数，$h_a^*\leqslant 1$ 时 $f=2.3$，$1<h_a^*<1.8$ 时 $f=3.1$. 如用 $R_a=\frac{mz_a}{2}$　$R_b=\frac{mz_b}{2}$ 代入（D）式，可得：

$$\eta=1-\frac{2\delta}{m}\left(\frac{1}{z_a}\pm\frac{1}{z_b}\right) \tag{D'}$$

对比（23）与（D′）可见，$f\cdot\mu$ 与 $\frac{2\delta}{m}$ 有相似的物理意义。其中 μ 与 δ 相关，f 与 m 相关。但由于 μ 与 f 取值在某个范围内选择，而 δ 与 m 均为定值，故（D′）式要比（23）式计算的精度高。比英国学者Tuplin公式[3]：

$$\eta=1-0.2\left(\frac{1}{z_a}\pm\frac{1}{z_b}\right) \tag{24}$$

更为精确。因为在此式中，把与摩擦和齿轮几何尺寸有关的因素均以系数0.2代替。这里指出，与公式（D′）的形式相似的还有西德Klein公式：

$$\eta=1-10\mu\left(\frac{1}{z_a}\pm\frac{1}{z_b}\right) \tag{25}$$

及日本雨角宗晴公式[4]：

$$\eta=1-\pi\cdot\mu\left(\frac{1}{z_a}\pm\frac{1}{z_b}\right)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+1-\varepsilon_1-\varepsilon_2) \tag{26}$$

公式（24）（25）中的符号意义同前，公式（26）中的符号规定及取值可参看原文[4]，不再赘述。一般认为雨角宗晴公式比较精确。本文研究的结果表明，如果考虑重迭系数，讨论一对齿轮而不是一对齿廓的啮合而对（D）进行修正，并且在将式（15）展开时取三阶以下无穷小项，可得到比（26）更精确的计算式。

（4）从式（E）可知，当 $l=0$ 时，$\eta_{ab}=1$. 这说明在节点 P 啮合时无滑动，效率为1. 如果 α 太大，式中 $\cos(\alpha+\mu)$ 变小，η_{ab} 降低，即 α 不能选太大值。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

（5）输出功的泛函 如图1所示，假定齿廓啮合从A点到B点，在dt时间内输入功为$T_a\omega_a dt$，输出功为$T_a\omega_a\eta_{ab}dt$，由于$\omega_a dt=d\varphi_a$（φ_a为a轮转角），所以有$T_a\omega_a\eta_{ab}dt=T_a\eta_{ab}d\varphi_a$。设输出功为$A$，则

$$A=T_a\int_A^B\eta_{ab}d\varphi_a \tag{27}$$

将式（E）代入式（27）得到：

$$A=T_a\int_A^B\left[1-\left(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b}\right)\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)}\cdot l\right]d\varphi_a \tag{F}$$

从图1可知l是α的函数，令$l=l(\alpha)$，在式（F）中令

$$F=1-\left(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b}\right)\cdot\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)} \tag{28}$$

则式（F）可写成

$$A=T_a\int_A^B F[l(\alpha)]d\varphi_a \tag{F'}$$

的积分形式的泛函。

参考文献

1 Кожевников С Н. Теориян Механизмов И Машин(изданис второе, исправленное и лополненное). МАШГИЗ, 1954. 10～49

2 天津大学等六院校合编. 机械原理. 人民教育出版社，1979. 97

3 Tuplin W A. Designing Compound epicyclic gear trains. *March Des.* 1957, 29: 7

4 （日）雨角宗晴. 転位内齿ｇ车功率とｺﾞｳﾞｇ设计. 机械ｇ研究，1970，22: 4～7

Research on Machinery Driving Efficiency

Jiang Jun

(Gansu Agricultural University)

Abstract This paper defined a new concept of generalized driving ratio expressed by π and π°. Also, a universal formula $\eta_{ab}=\frac{\pi^{0}}{\pi}$ was obtained. With this formula, gear mesh was studied, thus, obtaining an expression for output work A, i.e. $A=T_a\int_A^B[1-(\frac{1}{R_a}\pm\frac{1}{R_b})\cdot\frac{\sin\mu}{\cos(\alpha+\mu)}]d\varphi_a$.

Key words mechinery driving, driving ratio, generalizedd riving ratio, flat member rotating, rotating member flatness, velocity ★ isomechanic ideal frame

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net