第17卷第2期　　西北农业大学学报　　Vol.17, No.2
1989年6月　　Acta Univ.Septentrionali Occident.Agric.　　Jun.,1989

Cauchy 问题的级数解

周静芋

（基础课部）

摘　要

本文在级数能够足够多次逐项可微的条件下，给出一类偏微分方程的Cauchy问题的级数解。

关键词：偏微分方程；Cauchy问题；级数解

本文在级数能够足够多次逐项可微的条件下，给出一类偏微分方程的Cauchy问题的级数解，这类方程形式为

$$\frac{\partial m}{\partial t^m} u = t^s Lu$$

其中s为非负整数，L为关于（x_1，x_2，…，x_n）的线性偏微分算子。作为特例，本文得到波动方程、热传导方程和Laplace方程的Cauchy问题的级数形式解，以及Tricomi方程的奇异Cauchy问题的级数形式解。

1　基本结论

1）在级数能足够多次逐项可微的条件下，函数

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^{mk+i}}{(mk+i)!} L^k \Phi_i (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m}{\partial t^m} u = Lu, \\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Phi_0 (x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Phi_1 (x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Phi_{m-1} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

的解，其中Φ_0，Φ_1，…，Φ_{m-1}都无穷次可微。

事实上，设

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C_k (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

本文于1988年5月9日收到。

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

为其解，且足够多次逐项可微。由于

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{mk+i}}{(mk+i)!}C_{mk+i},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}u=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{mk+i-m}}{(mk+i-m)!}C_{mk+i}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{m(k-1)+i}}{(m(k-1)+i)!}C_{mk+i}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{mk+i}}{(mk+i)!}C_{m(k+1)+i},$$

$$Lu=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{mk+i}}{(mk+i)!}LC_{mk+i},$$

故当 $k\geq 1$ 时，

$$LC_{mk+i}=C_{m(k+1)+i}$$

$$C_{mk+i}=LC_{m(k-1)+i}=L^2C_{m(k-2)+i},$$

依次类推有

$$C_{mk+i}=L^kC_i$$

当 $k=0$，又由初始条件知，当 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 时，$C_i=\Phi_i$，从而

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{mk+i}}{(mk+i)!}L^k\Phi_i$$

在足够多次逐项可微的条件下，可以直接验证解的正确性。

前面为叙述方便起见，记 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 为 u，记 $\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 Φ_i，记 $C_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 C_k，在后面的叙述中，有时仍用这种记号。

2）在级数能足够多次逐项可微的条件下，函数

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{k(m+s)+i}}{(k(m+s)+i+s)!}\prod_{j=0}^{k}P^s_{j(m+s)+i+s}L^k\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}u=t^sLu,\\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)=\Phi_0(x_1, x_2, \cdots, x_n),\\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)=\Phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)=\Phi_{m-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

的解，其中 $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_{m-1}$ 都无穷次可微。

事实上，设

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

为其解，且足够多次逐项可微，由于

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^{k(m+s)+i}}{(k(m+s)+i)!} C_{k(m+s)+i},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^i}{i!} C_i + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s+1} \frac{t^{k(m+s)+i}}{(k(m+s)+i)!} C_{k(m+s)+i} \right]$$

$$= \sum_{i=m}^{m+s-1} \frac{t^{i-m}}{(i-m)!} C_i + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^{k(m+s)+i-m}}{(k(m+s)+i-m)!} C_{k(m+s)+i}$$

$$= \sum_{i=m}^{m+s-1} \frac{t^{i-m}}{(i-m)!} C_i + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^{k(m+s)+i+s}}{(k(m+s)+i+s)!} C_{(k+1)(m+s)+i},$$

$$t^s Lu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^{k(m+s)+i+s}}{(k(m+s)+i)!} LC_{k(m+s)+i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+s-1} \frac{t^{k(m+s)+i+s}}{(k(m+s)+i+s)!} P^s_{k(m+s)+i+s} LC_{k(m+s)+i},$$

故当 $k \geq 1$ 时，

$$C_{(k+1)(m+s)+i} = P^s_{k(m+s)+i+s} LC_{k(m+s)+i},$$

$$C_{k(m+s)+i} = P^s_{(k-1)(m+s)+i+s} LC_{(k-1)(m+s)+i}$$

$$= P^s_{(k-1)(m+s)+i+s} P^s_{(k-2)(m+s)+i+s} L^2 C_{(k-2)(m+s)+i},$$

依次类推有；

$$C_{k(m+s)+i} = \prod_{j=0}^{k-1} P^s_{j(m+s)+i+s} L^k C_i$$

当 $k = 0$，又由初始条件知，当 $0 \leqslant i \leqslant m-1$ 时，　$C_i = \Phi_i$，$m \leqslant i \leqslant m+s-1$ 时，$C_i = 0$，从而，

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^{k(m+s)+i}}{(k(m+s)+i+s)!} \prod_{j=0}^{k} P^s_{j(m+s)+i+s} L^k \Phi_i$$

在足够多次逐项可微的条件下，可以直接验证解的正确性。

2　典型方程的Cauchy问题

1）波动方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u \\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ u_t(x_1, x_2 \cdots, x_n, 0) = \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

根据基本结论，在级数能足够多次逐项可微的条件下，有如下形式的级数解：

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}a^{2k}\triangle^{k}\Phi+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}a^{2k}\triangle^{k}\Psi\right]$$

其中△是对x_1，x_2，…，x_n的拉普拉斯算子，当Φ，Ψ是一维时，将$\triangle^k\Phi$和$\triangle^k\Psi$分别换成$\Phi^{(2k)}$和$\Psi^{(2k)}$，下面同样。

对于非齐次方程Cauchy问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\triangle u+f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ u_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)=\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

可以由迭加原理和齐次化原理得到相应的级数形式解：

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}a^{2k}\triangle^{k}\Phi+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}a^{2k}\triangle^{k}\Psi\right]$$

$$+\int_0^t\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}a^{2k}\triangle^{k}f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\tau)\right]d\tau$$

2）热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\triangle u\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

根据基本结论，在级数能足够多次逐项可微的条件下，有如下形式的级数解：

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}a^{2k}\triangle^{k}\Phi$$

对于非齐次方程，也可以由迭加原理和齐次化原理得到相应的级数形式解。

3）Laplace方程的Cauchy问题

$$\begin{cases}u_{tt}=-\triangle u\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ u_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,0)=\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

根据基本结论，在级数足够多次逐项可微的条件下，有如下形式的级数解：

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\triangle^{k}\Phi+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\triangle^{k}\Psi\right]$$

特别，在上述这些典型方程的Cauchy问题中，当Φ和Ψ为多项式时，级数解仅有有限个非零项，故解必为多项式，这时，这种解法比较简便。

3 Tricomi方程的奇异Cauchy问题

Tricomi方程是指$u_{tt}=tu_{xx}$这种混合型方程，我们不妨称$u_{tt}=t\triangle u$为广义的Tricomi方程。要求其解在椭圆型区域和双曲型区域的分界处满足初值条件的问题，称为Tricomi方程的奇异Cauchy问题：

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} u_{tt} = t\triangle u \\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ u_t(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0) = \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

根据基本结论，在级数能够足够多次逐项可微的条件下，有如下形式的级数解：

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{3k}}{(3k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (3j+1) \triangle^k \Phi + \frac{t^{3k+1}}{(3k+2)!} \prod_{j=0}^{k} (3j+2) \triangle^k \Psi \right]$$

同样，当Φ和Ψ为多项式时，该解为多项式。

最后指出，本文所给出的级数解，超越了维数的界限，把不同维数时的解统一为一种表达式。

本文在写作过程中，得到西北农业大学袁志发、王乃信副教授，四川大学熊祥斗副教授等的帮助，在此一并致谢。

参 考 文 献

1 复旦大学数学系主编.数学物理方程，人民教育出版社，1979

2 А·В·бицадзе.齐民友，吴中海译.数学进展，1958：349－352

3 Bitsadze, A V Kalimichenko D F. A Collection of problems on the equations of mathematical physics, 1980

SERIES SOLUTIONS TO CAUCHY PROBLEM

Zhou Jingyu

(Basic Course Department, the Northwestern Agricultural University)

Abstract

In the case of series in number of times of the termwise differentiation, this paper gives series soltuions to one type of Cauchy problem of particial differential equation.

Key Words: partial differential equation; Cauchy problem; series solution

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net