

空间角度模式计算法的研究

童 国 华

(图 艺 系)

摘 要

古老的加·蒙日 (G·Monge 1746~1818) 的图解法, 在现代工业生产中仍发挥着巨大作用, 但此法缺乏数值的定量计算。本文根据生产和计算机辅助设计发展的需要, 提出一种新的空间角度计算方法——模式计算法。该法具有直观简明、思路清晰和使用灵活等特点, 达到了用简易的方法, 解决复杂空间工程问题, 而避免纯数学运算的目的。

关键词: 空间角度; 图解计算; 几何模型; 计算模式

解决科技领域中比较复杂的空间角度计算问题, 具有一定的难度, 由于传统计算方法比较繁琐, 通常采用试凑、试加工等近似方法解决, 影响产品精度及生产效率。近年来, 国内外学者对空间角度的计算, 提出了多种计算方法, 如查表算法^[1-3], 球面图法^[4-6]及向量矩阵法^[7-8]等, 在生产中起到了很好的作用。但查表算法球面图法主要缺点是计算公式多, 计算时离不开表格, 在查表过程中影响计算速度, 而向量矩阵法运算繁复, 直观性差。

本文根据文献[9]中提出的计算思想, 加以整理、扩展, 并系统成一种新的计算方法——模式计算法。此法根据线、面几何元素的投影规律, 确立典型的几何模型, 在投影体系中建立具有普遍适应性的线、面等元素有关参数之间的函数关系, 以便套用于其它各种位置的投影体系, 故模式计算法不需要预先建立大量计算公式, 如文献[2]对直线的计算推导了60个公式, 而模式计算法只需两个模式就够了; 又如文献[3], 对平面角的计算推导了四类51个计算式, 而模式计算法仅一个模式就可以了, 并富于较强的解题威力。此文仅对模式分类及典型模式的建立进行初步探讨。

1 模式的分类与确定

空间角度问题, 可以分为直线、平面以及平面上线角三类。

1.1 直线计算模式的确定

空间直线在三投影面体系中与H, V, W投影面的倾角, 分别为 θ_H , θ_V , θ_W , 三个投影角分别为 θ , θ' , θ'' , 如图1。

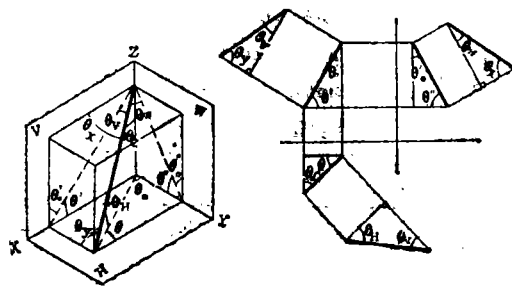


图 1

根据直线角度间的相互关系, 可归结为四种基本形式, 导出的角度关系式见表1。

本文于1987年4月中国工程图学会应用图学专业委员会, 第二届会议暨学术报告会上宣读。

本文于1987年3月31日收到。

表1 直线角度计算模式

编号	类别	名称	参数关系	模式	体系
1	直	单倾角	直线的一个倾角与两个投影角	$\text{tg}\theta_H = \text{tg}\theta' \cos\theta$	$\frac{H}{V}$
2		双倾角	直线的两个倾角与一个投影角	$\sin\theta_H = \sin\theta' \cos\theta_V$	$\frac{H}{V}$
3		全投影角	直线的三个投影角	$\text{tg}\theta' \text{ctg}\theta'' \text{ctg}\theta = 1$	$\frac{H}{V}$
4	线	全倾角	直线的三个倾角	$\sin^2\theta_H + \sin^2\theta_V + \sin^2\theta_W = 1$	$\frac{W}{V}$

(1) 直线单倾角和双倾角模式, 是直线角度计算的基本模式。这种建立在两面体系 (V/H) 中的倾角与投影角之间的函数关系, 同样适用于 V/V' , V'/H' , H/V' , V'/V' , W/V' (分母表示直线倾角所在投影面) 体系或其它辅助投影面与原投影面构成新的两面体系。故根据计算需要, 这两种基本模式可套用于任何两投影面体系, 结果都是正确的。

(2) 直线全投影角和全倾角之间的函数关系, 可由单倾角和双倾角计算模式分别推导而得, 只适用于三面投影体系中的唯一情况, 不能作为模式加以套用。

表2 直线模式套用

编号	参数关系	体系						套用模式
		$\frac{V}{H}$	$\frac{H}{V}$	$\frac{W}{V}$	$\frac{V}{W}$	$\frac{H}{W}$	$\frac{W}{H}$	
1	$\text{tg}\theta_H = \text{tg}\theta' \cos\theta$	—						
2	$\text{tg}\theta_V = \text{tg}\theta' \cos\theta''$		—					
3	$\text{tg}\theta_W = \text{ctg}\theta' \sin\theta''$			—				
4	$\text{tg}\theta_V = \text{ctg}\theta' \sin\theta''$				—			I
5	$\text{tg}\theta_W = \text{ctg}\theta' \cos\theta''$					—		
6	$\text{tg}\theta_H = \text{tg}\theta' \sin\theta''$						—	
7	$\sin\theta_H = \sin\theta' \cos\theta_V$	—						
8	$\sin\theta_V = \sin\theta' \cos\theta_H$		—					
9	$\sin\theta_V = \cos\theta' \cos\theta_W$			—				I
10	$\sin\theta_W = \cos\theta' \cos\theta_V$				—			
11	$\sin\theta_W = \cos\theta' \cos\theta_H$					—		
12	$\sin\theta_H = \sin\theta' \cos\theta_W$						—	
13	$\text{tg}\theta' \text{ctg}\theta'' \text{ctg}\theta = 1$	—					—	I—I
14	$\sin^2\theta_H + \sin^2\theta_V + \sin^2\theta_W = 1$	—			—			
15	$\sin\theta_H = \text{tg}\theta' \sin\theta_W$	—			—			I—I
16	$\sin\theta_H = \text{tg}\theta' \sin\theta_V$			—				
17	$\sin\theta_V = \text{tg}\theta' \sin\theta_W$		—					
18	$\text{ctg}^2\theta_H = \text{ctg}^2\theta' + \text{ctg}^2\theta''$	—						
19	$\text{ctg}^2\theta_V = \text{ctg}^2\theta' + \text{ctg}^2\theta''$		—					I—I
20	$\text{ctg}^2\theta_W = \text{ctg}^2\theta' + \text{ctg}^2\theta''$			—				

(3) 根据空间直线在三投影面体系中六个主要参数(除去六个余角关系)即直线对投影面的倾角, $(\theta_H, \theta_V, \theta_W)$ 及其投影角 $(\theta, \theta', \theta'')$ [图1], 按无重复参数排列组合, 以三个参数为一组 $(C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20)$, 直线计算的公式数应为20个, 这20个公式全部可套用直线的两个基本模式直接写出, 或模式间联立求得, 详见表2。

1.2 平面计算模式的确立

平面可以转化由法线表示, 因此直线的计算模式对平面角度的计算问题是同样适用的。除此以外, 在较多情况下, 平面采用迹线或平面上迹线平行线表示, 则平面角度包含9个参数如图2。

迹角——空间平面两条对应迹线所夹的角度 $(\angle A_0, \angle B_0, \angle C_0)$;

迹线投影角——平面迹线与投影轴之夹角 (ϕ, ϕ', ϕ'') ;

坡角——平面对投影面的最大倾角 (ϕ_H, ϕ_V, ϕ_W) 。

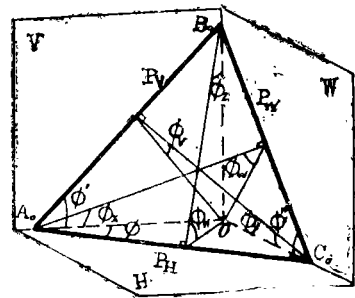


图 2

根据平面角度参数间的相互关系, 可归结为四种基本形式, 现导出的角度参数关系式及扩展式, 见表3。

表3 平面角度计算模式

类别	编号	名称	参数关系	模式	扩展式
平面	5	单坡角	平面的一个坡角 与两个迹线投影角	$\text{tg}\phi_H = \text{tg}\phi' / \sin\phi$	$\text{tg}\phi\phi_V = \text{tg}\phi / \sin\phi''$ $\text{tg}\phi_H = \text{tg}\phi'' / \cos\phi$ $\text{tg}\phi_W = \text{ctg}\phi / \sin\phi''$ $\text{tg}\phi_V = \text{ctg}\phi'' / \cos\phi$ $\text{tg}\phi_W = \text{ctg}\phi' / \cos\phi''$
	6	双坡角	平面的两个坡角 与一个迹线投影角	$\cos\phi_H = \cos\phi' \sin\phi$	$\cos\phi_V = \cos\phi \sin\phi_H$ $\cos\phi_H = \cos\phi'' \sin\phi_W$ $\cos\phi_W = \sin\phi \sin\phi_H$ $\cos\phi_V = \sin\phi'' \sin\phi_W$ $\cos\phi_W = \sin\phi' \sin\phi_V$
	7	迹角余弦	平面迹角与两个迹线投影角	$\cos A_0 = \cos\phi' \cos\phi$	$\cos B_0 = \sin\phi' \sin\phi''$ $\cos C_0 = \cos\phi'' \sin\phi$
面	8	迹角正弦	平面迹角与一个迹线投影角一个坡角	$\sin A_0 = \sin\phi' / \sin\phi_H$	$\sin A_0 = \sin\phi / \sin\phi_V$ $\sin B_0 = \cos\phi' / \sin\phi_W$ $\sin B_0 = \cos\phi'' / \sin\phi_V$ $\sin C_0 = \sin\phi'' / \sin\phi_H$ $\sin C_0 = \cos\phi / \sin\phi_W$

(1) 模式(5)可由直线的单倾角模式导出, 模式(6)可由直线的双倾角模式导出。这两个模式是平面计算常用的基本模式, 应用广泛。

(2) 模式(7)是平面上线角模式(10)的一种特殊情况, 计算式可由模式(10)转化而

来,也可不单独列入平面计算模式。

(8) 模式 (8) 应用较少。

1.3 平面上线角模式的确立 (图3)

两相交直线 (×) 可以决定一个平面,平面的迹线方向是由两直线的投影角所决定,故迹线与两直线投影角之间存在一定的函数关系。

另外,相交两直线所决定的平面坡角 ϕ_H 与直线倾角、夹角、夹角投影角等参数有关,现导出角度间的三种关系,见表4。

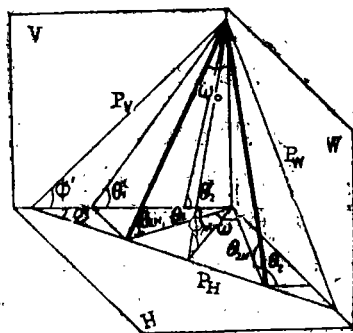


图 3

表 4 平面上线角计算模式

编号	类别	名称	参数关系	模式
9	平面	迹线正切	平面上直线与迹线投影角的关系	$\operatorname{tg} \phi^* \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \theta^* + \operatorname{tg} \phi^* \operatorname{tg} \theta$
10	平面上线角	线 角	平面上直线夹角与倾角的关系	$\cos \omega = \frac{\cos \omega_0 - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}$
11	平面上线角	角 角	平面上直线夹角与坡角的关系	$\sin \omega = \frac{\sin \omega_0 \cos \phi_H}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}$

模式 (10) 是平面上线角的主要式,应用比较广泛,该模式可代替文献 [4] 所导出的 $(18+6+18+9)=51$ 个公式;此模式与其它模式联合使用,可十分简便地解决某些复杂问题。

2 计算模式的运用

2.1 刃磨铲刀的调整计算

图4所示为一铲刀简图。已知 $\alpha, \beta, \phi_1 = \phi_2$ 。现讨论磨削铲刀法向后面时的调整角 β_a 及砂轮修整角 ϕ_{1a} 和 ϕ_{2a} 的计算。

(1) 调整方法

将铲刀两法向后面的理论交线 AB 置于水平位置,再用正弦规将夹具垫起 β_a 角 (图5),此时 AB 处于侧垂线位置,则在 W 投影面上反映两法向后面的真实夹角——即为待求砂轮修整角 ϕ_{1a} 和 ϕ_{2a} 。

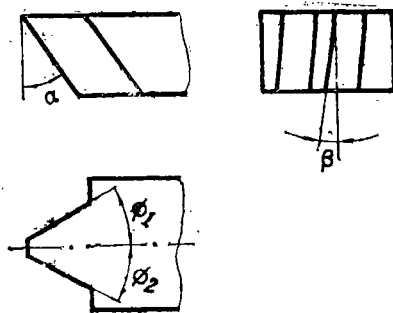


图 4

现将法向后面用 ABCD 和 ABEI 表示,其理论交线为 AB。经两次投影变换后,即可分别求出调整角 β_a 及砂轮修整角 ϕ_{1a} 、 ϕ_{2a} ,如图6。

(2) 调整角 β_a 的计算

$$\left(\frac{W}{V}\right) \text{ 体系 } \operatorname{tg} \beta_a = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha \quad \text{单倾角模式}$$

(3) 砂轮修整角 ϕ_{1a} 的计算

求 AE 线的辅助角 ϵ_1

$$\left(\frac{H}{V}\right) \text{ 体系 } \operatorname{tg} \phi_1 = \operatorname{tg} \epsilon_1 \cdot \cos (90^\circ - \alpha) \quad \therefore \operatorname{tg} \epsilon_1 = \operatorname{tg} \phi_1 / \sin \alpha$$

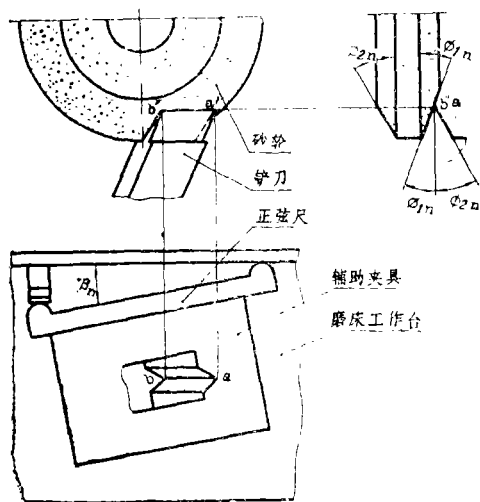


图 5

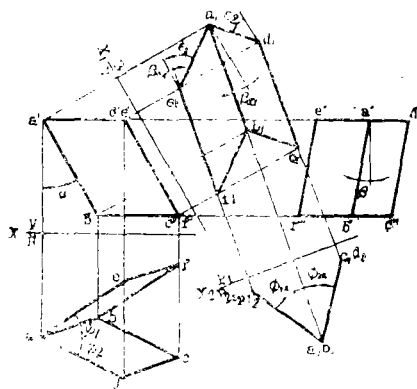


图 6

设AE对 P_1 面的倾角为 ω_1 (图中未画出)

$$\left(\frac{V}{P_1}\right) \text{ 体系 } \operatorname{tg} \omega_1 = \cos \varepsilon_1 / \operatorname{tg} \alpha$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \text{ 体系 } \operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{tg} (90^\circ - \phi_{1n}) \cos [90^\circ - (\varepsilon_1 - \beta_n)] = \sin (\varepsilon_1 - \beta_n) / \operatorname{tg} \phi_{1n}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \phi_{1n} = \sin (\varepsilon_1 - \beta_n) \cdot \operatorname{tg} \alpha / \cos \varepsilon_1$$

(4) 砂轮修整角 ϕ_{2n} 的计算

$$\text{同理推证 } \operatorname{tg} \phi_{2n} = \sin (\varepsilon_2 + \beta_n) \cdot \operatorname{tg} \alpha / \cos \varepsilon_2$$

其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

2.2 双刃面加工专机参数的图解及计算

根据图7齿纹动刀片零件图, 计算双刃面刨削加工专机的 θ , α 参数及纵向齿纹滚压专机的 θ_1 , α_1 和 ξ 参数 (图8)。

(1) 工艺分析及图解: 详见文献[10]。

(2) 计算公式推导 (图9)

①双刃面刨削专机: 双刃面刨削是刨、滚联合机的第一道工序, 该机需推导两个计算公式。

(A) 刀片仰角 (θ)

在俯视与剖面图中, 利用单倾角模式, 直接可写出一线 θ 角的计算公式

$$\text{即 } \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta$$

(B) 刀具倾角 (α)

在 $\left(\frac{H}{W}\right)$ 体系中:

a. 平面 $ABCI$ 在 H 面上的主直线 ai 的投影角为 $(90^\circ - \beta)$;

b. 平面 $ABCI$ 在 W 面上的主直线 ac 的投影角为 θ ;

c. 平面 $ABCI$ 对 V 面的坡角为 $(90^\circ - \alpha)$ 。

故可用单坡角模式写出刀具倾角 (α) 的计算式:

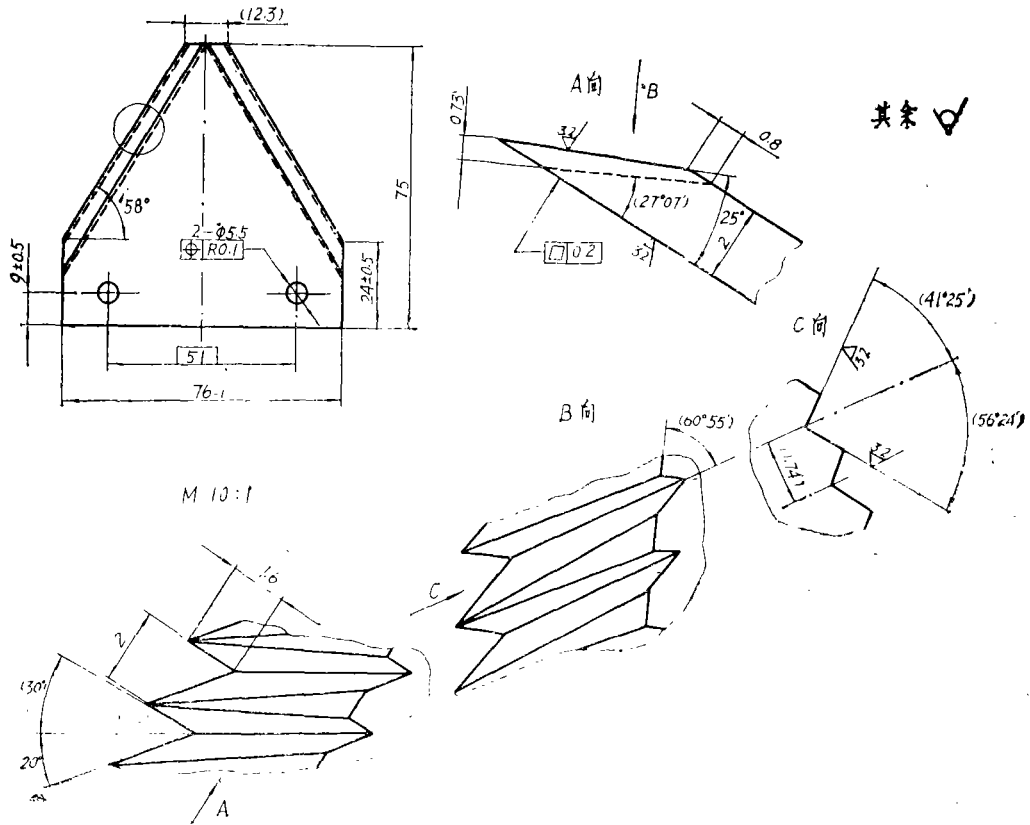


图 7

$$\text{即 } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) / \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \theta \operatorname{tg} \beta$$

②双刃面滚压专机

齿纹双刃面滚压是刨、滚联合机的第二道工序, 该机需推导 3 个计算公式, 其中刀片仰角 θ_1 及滚轮轴线倾角 α_1 的公式推导方法与刃面刨削相同, 不同的仅是以齿纹沟底线所决定的假想面代替刃面来进行换算。

$$(A) \text{ 刀片仰角 } \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \beta \cos \beta$$

$$(B) \text{ 刀片倾角 } \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \beta \sin \theta_1$$

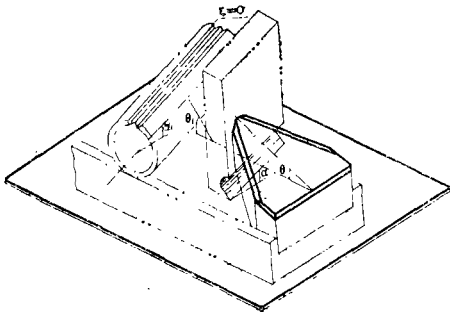


图 8

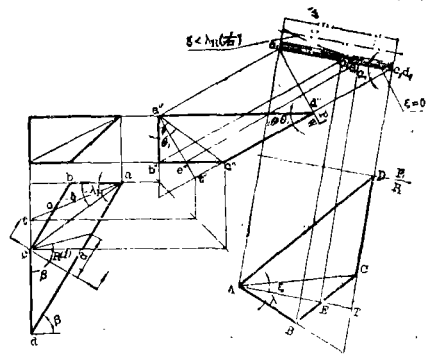


图 9

(C) 螺纹倾角 (ξ)

$$\begin{aligned} \text{在 } \left(\frac{H}{I}\right) \text{ 体系中} \quad & \operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} (\phi - \theta_1) \cos (90^\circ - \alpha_1) \\ & \therefore \operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} (\phi - \theta_1) \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

对公式中 ϕ 角的推导:

设 W 对 V 面的倾角为 ϕ_w

$$\begin{aligned} \text{在 } \left(\frac{W}{V}\right) \text{ 体系中} \quad & \operatorname{tg} \phi_w = \operatorname{tg} (90^\circ - \delta) \cos (90^\circ - \phi) \\ & = \sin \phi / \operatorname{tg} \delta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{在 } \left(\frac{H}{I}\right) \text{ 体系中} \quad & \operatorname{tg} \phi_w = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha_1) \cos (\phi - \theta_1) \\ & = \cos (\phi - \theta_1) / \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned} \quad (2)$$

联立 (1)、(2) 式

$$\frac{\cos (\phi - \theta_1)}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \delta}$$

$$\text{整理后得} \quad \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \delta \cos \theta_1 / \operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \delta \sin \theta_1 \quad (3)$$

③讨论

(A) 若 $\delta = 0$, $\phi = 0$

$$\text{则} \quad \operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} (-\theta_1) \sin \alpha_1 = -\operatorname{tg} \theta_1 \sin \alpha_1$$

(B) 若 $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & \operatorname{tg} (\phi - \theta_1) \sin \alpha_1 = 0 \\ & \frac{\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \theta_1} \sin \alpha_1 = 0 \\ & \therefore \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \theta_1 \end{aligned}$$

代入公式 (3) 得

$$\frac{\operatorname{tg} \delta \cos \theta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \delta \sin \theta_1} = \operatorname{tg} \theta_1$$

$$\text{整理后得} \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \theta_1$$

3 结束语

采用模式计算法排除了传统算法^{[1][2]}中与角度计算无关的线性尺寸作为计算的过渡, 所以计算简明扼要、思路清晰, 同时又运用模式概念对计算式加以套用或模式联立, 直接写出一系列的扩展式, 所以公式数量较查表法大大减少, 使用灵活简便; 与球面法比较, 易学、易接受、易推广使用。

以上所列的计算模式, 经过对大量应用实例的演算和考核, 证实能满足一般问题的计算要求, 并具有相当的方便性。今后为了适应计算机辅助设计的需要, 使空间角度的计算更为实用、简便, 尚需进一步将上述模式改变成计算通式, 以适应计算机程序的编制。

参 考 文 献

- 1 温俊铭等编著. 空间角度计算. 国防工业出版社, 1980
- 2 林文焕等编著. 机械加工计算. 国防工业出版社, 1978
- 3 黄清本等编著. 图解与计算在机械工程中的应用. 吉林人民出版社, 1984: 52—71
- 4 林齐华等编著. 空间角度计算的球面图法. 上海科技出版社, 1978
- 5 Pare E G, Loving R O, Hill I. L. Descriptive geometry. 5th Edition. 1977: 338—345
- 6 Stinson William G. Use of the Stereographic net in structural geology problems involving rotation. *Engineering Design Graphics Journal* spring 1977: 41—45
- 7 艾运钧编著. 工程图学分析引论. 中国铁道出版社, 1984: 121—148
- 8 张启光编著. 空间机构的分析与综合. 机械工业出版社, 1984: 140—156
- 9 于长江. 高等画法几何学. 北京航空学院, 1983
- 10 童国华. 收割机齿刃刀片双刃面(齿纹)加工专机参数的图解及计算. 西安地区高等院校制图教学与科研, 1979 (1): 72—88
- 11 西北工业大学制图教研室编. 画法几何及机械制图(上册). 陕西科技出版社, 1980: 93—100

RESEARCH ON MODEL COMPUTATION OF THE SPACE ANGLE

Tong Guohua

(Department of Horticulture)

Abstract

Although the age-old graphic method of G. Mange (1746—1818) has a great effect on the modern industrial production, it lacks quantitative computation of numerical value. According to the necessity of practical production and development of computer-aided design, this paper proposes a new method of space angle computation -- model computation. It has such characteristics as directly to perceive, clearly to think and flexibly to use. One uses it to solve complicated problems of space project with a simple and easy method, avoiding the operation of pure-mathematics.

Key words: space angle; geometry model; graphic computation; computation model