

关于静力学与动力学矩方程间的对应关系

张自恺

(西北农业大学水利系)

摘要

本文从理论上论述了：作平面运动的刚体动力学与平面力系静力学之间存在着明显的对应关系，即在动力学中亦存在着解决此类问题的一矩、二矩和三矩方程组三种形式，只不过在动力学中投影方程用的是动量定理，矩方程用的是动量矩定理。应用此原理同样可较方便地解决工程实际问题。

关键词：刚体动力学；静力学；对应关系

静力学问题是动力学问题的一种特殊情况，因此，静力学理论一般也是动力学理论的特情。这样，两者理论之间就会有不少内容形成对应关系。对于教学来说，揭示这种关系就会为教好和学好理论力学提供方便。本文仅就矩方程方面来叙述这种对应关系。

1 简述静力学与动力学的对应关系

下表列举了这种关系的主要内容：

项 别	静 力 学	动 力 学	附 注
1	投影平衡方程 $\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases}$ (应用于质点及质点系时，方程形式一样)	质点运动微分方程 (应用于质点) $\begin{cases} \sum X = m\ddot{x} \\ \sum Y = m\ddot{y} \\ \sum Z = m\ddot{z} \end{cases}$	左边各式中代号的含义见一般理论力学教材
		质心运动定理 (应用于质点系) $\begin{cases} \sum X^{(\cdot)} = M\ddot{x}_c \\ \sum Y^{(\cdot)} = M\ddot{y}_c \\ \sum Z^{(\cdot)} = M\ddot{z}_c \end{cases}$	同上

续附表

2	杠杆平衡方程或力矩平衡方程	刚体定轴转动微分方程	同上
	$\sum m_i = 0$	$\sum m_z^{(e)} = J_z \ddot{\varphi}$	
3	平面力系平衡方程	刚体平面运动微分方程	L_A, L_B 及 L_C 为质点系对A, B及C点的动量矩其余同上。
	$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum m_O = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sum X^{(e)} = M\ddot{X}_C \\ \sum Y^{(e)} = M\ddot{Y}_C \\ \sum Z^{(e)} = M\ddot{Z}_C \end{cases}$	
3	$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum m_A = 0 \\ \sum m_B = 0 \end{cases}$ (A B不垂直于X轴) $\begin{cases} \sum m_A = 0 \\ \sum m_B = 0 \\ \sum m_C = 0 \end{cases}$ (A, B, C不共线)	刚体作平面运动时运动微分方程的其他形式 $\sum X^{(e)} = M\ddot{X}_C$ $\sum m_A^{(e)} = \frac{d L_A}{d t}$ $\sum m_B^{(e)} = \frac{d L_B}{d t}$ (A B不垂直于X轴) $\begin{cases} \sum m_A^{(e)} = \frac{d L_A}{d t} \\ \sum m_B^{(e)} = \frac{d L_B}{d t} \\ \sum m_C^{(e)} = \frac{d L_C}{d t} \end{cases}$ (A, B, C不共线)	同 (1)
	定轴刚体反力计算 (具体式子略)	定轴转动刚体轴承动反力计算公式 (具体式子略)	
4			

2 有关矩方程间的对应关系

众所周知,在静力学中平面力系的平衡方程有三种形式,即一矩方程组,二矩方程组和三矩方程组。这些方程组说明,投影方程可局部或全部用矩方程代替。这一性质在动力学中仍然成立,这就是当我们联合应用质心运动定理和动量矩定理于平面运动刚体时,在现时的

课本中都是应用质心运动定理(或动量定理)写两个投影方程,同时用动量矩定理写一个矩方程而得到刚体平面运动微分方程。不过,为解决这个问题,我们可以不用动量定理,而只用动量矩定理;或只用动量定理的一个方程,其余两个方程均用动量矩定理。也就是说,在动力学中也有一矩、二矩和三矩方程组。在具体应用中,关键是动量矩的计算。下面就常见的刚体三种运动谈动量矩的计算。

2.1 作平动的刚体(图1)

设平动刚体的速度为 V 。在此瞬时,任一质点 m_i 的动量为 $m_i V$ 。现需求刚体对三轴的动量矩(请注意,现在的矩轴可选为一空间直角坐标系)。

显然,我们不难应用合矢量矩定理得到对 x 、 y 及 z 轴的动量矩

$$\sum m_i (m_i V) = m_x (M V) \quad (1)$$

式中: M ——刚体的质量;

MV ——刚体的动量,其作用点在质心 C 。这样,我们不难用刚体的动量对某轴的矩来求得刚体对该轴的动量矩。

2.2 作定轴转动的刚体(图2)

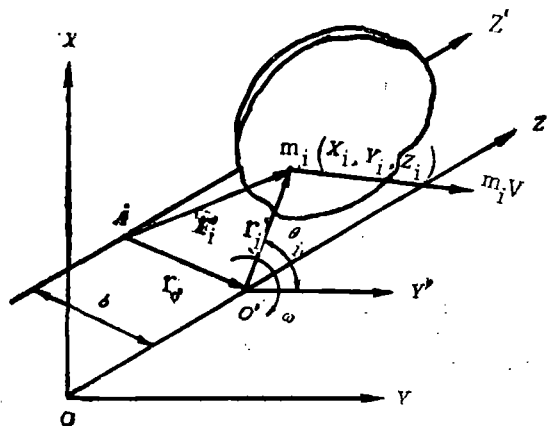


图 2

如果计算动量矩的轴非转轴 z ,而为平行于转轴的任一 z' 轴, z 与 z' 轴之间的距离为 b ,平面 $m_i AO' y'$ 仍垂直于 z 轴。则由图可见

$$r'_i = r_i + r_{o'}$$

于是

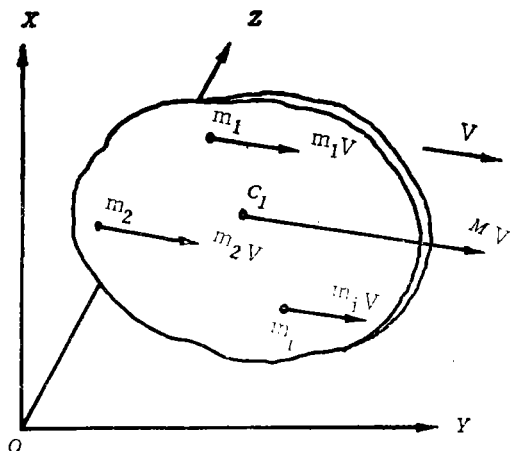


图 1

设刚体绕 z 轴作定轴转动。任意第 i 个质点的质量为 m_i ,坐标为 x_i , y_i 和 z_i 。于是,刚体对三轴的动量矩(图中 $m_i o' y'$ 平面垂直于 z 轴)为

$$L_z = J_z \omega \quad (2)$$

$$\begin{aligned} L_y &= \sum m_i r_i \omega \cos \theta_i z_i \\ &= \sum m_i r_i \omega \frac{y_i}{r_i} z_i \\ &= \omega \sum m_i y_i z_i \\ &= \omega J_{yz} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{同理,有} \quad L_x = \omega J_{xz}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 L_A &= \sum \mathbf{r}_j' \times (m_j \mathbf{v}_j) = \sum (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{o'}) \times (m_j \mathbf{v}_j) = \sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j \\
 &+ \sum \mathbf{r}_{o'} \times m_j \mathbf{v}_j = \sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j + \mathbf{r}_{o'} \times \sum m_j \mathbf{v}_j = \sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j \\
 &+ \mathbf{r}_{o'} \times M \mathbf{v}_o.
 \end{aligned}$$

将上式投影到三轴上, 得对三轴的动量矩, 如对 z' 轴, 则有

$$L_{z'} = [\sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j]_{z'} + [\mathbf{r}_{o'} \times M \mathbf{v}_o]_{z'} = J_z \omega + (\mathbf{r}_{o'} \times M \mathbf{v}_o)_{z'} \quad (5)$$

下面列举两种常见情况:

a. 作定轴转动的等直曲柄 (图3)

图3中, 直杆长 L_1 , 以 ω 绕 z 轴旋转, 则

$$L_z = \int_0^{L_1} dl \cdot \gamma l \omega \cos \theta \cdot a = \gamma \omega a \cos \theta \frac{L_1^2}{2} = \frac{1}{2} M L_1 \omega a \cos \theta$$

式中: M ——杆的总质量。

b. 作定轴转动的圆盘 (图4)

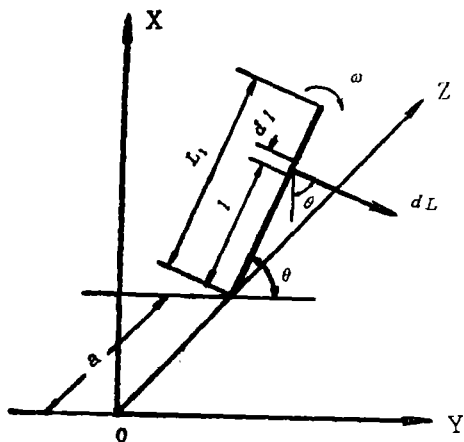


图 3

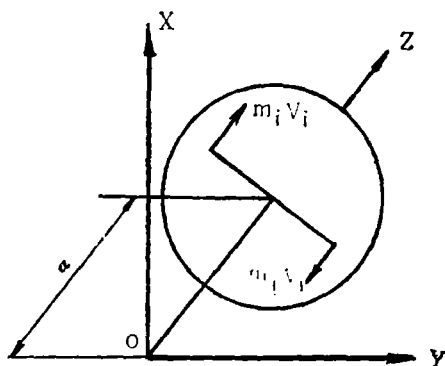


图 4

盘的质心 C 在圆心, 转轴通过 C , 且质量对称面平行于 xy 平面。不难看出, 此时根据对称性, 圆盘对 x 及 y 轴的动量矩为零。

2.3 作平面运动刚体 (图5)

为简单计, 设平面运动刚体具有质量对称面。设任一质点的质量为 m_j 。根据平面运动理论: 图形上任一点的绝对速度 $\mathbf{v}_j$ 等于其相对速度 $\mathbf{v}_{j,r}$ 与牵连速度 $\mathbf{v}_{j,e}$ 的矢量和。于是可知, 该点的动量矩由两部分组成, 整个刚体的动量矩也由两部分组成, 例如, 对 y 轴则有:

$$L_y = \sum l_{j,y} = \sum m_j (m_j v_{j,r}) + \sum m_j (m_j v_{j,e}) \quad (6)$$

由此可见, 我们只需求出由于牵连平动所产生的动量矩加上由于相对转动所产生的动量矩就行了。而这两部分动量矩的计算则可利用上面已推出的式 (1), (2), (3) 及 (4) 等

下面举例说明如何用二矩和三矩方程组解决动力学问题, 同时简要地讨论一下多矩方程

组的作用。

例1 电动机的外壳固定在水平基础上，定子重 P ，转子重 p ，如图6所示。转子的轴通过定子的质心 O_1 ，但由于制造误差，转子的质心 O_2 到 O_1 的距离为 e 。已知转子匀速转动，角速度为 ω ，求基础的支座反力。

解：本题系哈工大所编《理论力学》下册中的例题。原书用动量定理解答，现用三矩方程组求解。

第一解法 这个解法的特点是矩轴为一空间坐标系。图中取平行于 x 及 y 轴的 x_1 及 y_1 轴，使 x 与 x_1 ， y 与 y_1 轴间距离为 a 。

对 y_1 轴写动量矩定理方程

$$\frac{d \sum m_{y_1} (mv)}{dt} = \sum m_{y_1} (F_e) \quad (7)$$

图 5

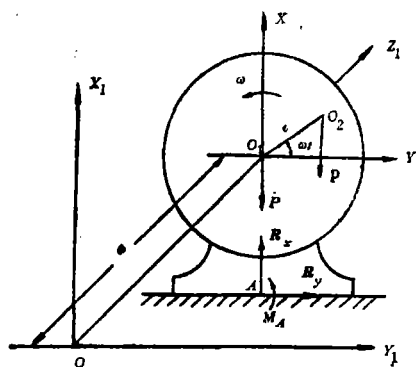


图 6

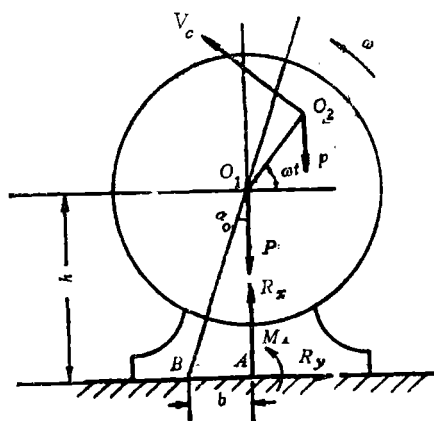


图 7

为求转子对 y_1 轴的动量矩，我们应用式(3)。由于已简化为平面结构，故式(3) J_{y_1} 中的 z_1 为常量 a ，于是有

$$L_{y_1} = \omega J_{y_1} = \omega \left(\sum m_i y_i \right) a = \omega a M y_c = \omega a \frac{p}{y} e \cos \omega t$$

式(7)成为

$$\frac{d \left(\frac{p}{g} e \omega \cos \omega t a \right)}{dt} = - (P + p) a + R_x a$$

从而得

$$R_x = P + p - \frac{p}{g} e \omega^2 \sin \omega t$$

再对 x_1 写动量矩定理

$$\frac{d\left(\frac{p}{g} e \omega \sin \omega t\right)}{dt} = -R_y a$$

从而得

$$R_y = -\frac{p}{g} e \omega^2 \cos \omega t$$

再对 z_1 轴写动量矩定理

$$\frac{d(J_{z_1} \omega)}{dt} = -p e \cos \omega t + R_y (h) + M_A$$

从而得

$$M_A = p e \cos \omega t + \frac{p}{g} e \omega^2 \cos \omega t \cdot h.$$

第二解法 这种解法的特点是采取与静力学完全相似的方法,即取三个点为矩心求解(图7)。

以A为矩心,动量矩按式(5)计算。不过在应用时,如果质点系对 z 轴的动量矩为常量,则式(5)右边第一项的导数不存在。于是得

$$\frac{d(J_{O_1} \omega + M V_C \cdot h \sin \omega t)}{dt} = -p e \cos \omega t + M_A,$$

乃得

$$M_A = p e \cos \omega t + \frac{p}{g} e \omega^2 h \cos \omega t.$$

再取 O_1 点为矩心,得

$$\frac{d(J_{O_1} \omega)}{dt} = -p e \cos \omega t + R_y h + M_A$$

乃得

$$R_y = -\frac{p}{g} e \omega^2 \cos \omega t$$

再取B点为矩心,B点距A为 b ,得

$$\begin{aligned} & \frac{d(J_{O_1} \omega + \sqrt{b^2 + h^2} \frac{p}{g} e \omega \sin(\omega t + \alpha_0))}{dt} \\ &= -p(e \cos \omega t + b) - (P - R_x) b + M \end{aligned}$$

化简上式,得

$$R_x = P + p - \frac{p}{g} e \omega^2 \sin \omega t.$$

不难看出,如将第二解法的第三个方程代之以动量定理方程,解算将得到简化。下面我们进一步来看看本文所述内容的作用。

首先,在理论上,本文在“矩”领域内揭示了静力学与动力学之间的内在联系和区别。这对于教学来讲,可以使师生看到这两部分知识间存在着“矢量之矩运算”和“矢量投影运

算”的共同特点,而在概念上却各有自己的特点。其次,在实际应用上,在不少矩情况下,本文提出的多矩方程组不如用一矩方程组来的简单一些。这是因为投影运算一般比矩运算要简单一些。这种情况大体和静力学的同类方程组相类似。不过,现在的情况要复杂一些,因为在静力学中,由于物体是平衡的,因此加速度为零;而在动力学中,物体的运动加速度不为零,因此出现加速度(或速度,或位移)未知量(这里,我们是指已知力求运动的情况)。于是,除了力矩运算外,还要作动量矩运算等。这样一来,是否多矩方程组就无实用价值了呢?不是的,下面再举例予以说明,在一些情况下,用多矩方程组与用一矩方程组相比,解题的难易程度差不多。

例2 图8示均质杆AB长为 l ,放在铅直平面内,杆的一端靠在光滑的铅直墙上,另一端B放在光滑的水平地板上,并与水平面成 φ 角。此后,令杆由静止状态倒下,求(1)杆在任意位置时的角加速度和角速度;(2)杆所受反力。

解: 设某一瞬时,质量为 m 的杆运动到AB位置。首先以 C_1 为矩心列出动量矩定理方程。由于AB作平面运动,据式(6)其动量矩包含两项,于是有

$$\frac{d(m \frac{l}{2} \omega \cdot \frac{l}{2} + J_c \omega)}{dt} = p \frac{l}{2} \cos \varphi$$

上式中代入 $J_c = \frac{1}{12}ml^2$,得

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2l} \cos \varphi。$$

注意到 $-\frac{d\varphi}{dt} = \omega$,积分上式得

$$\omega^2 = -\frac{3g}{l} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

为了求得 N_A ,应用沿x轴的动量定理:

$$\frac{d(m \frac{l}{2} \omega \sin \varphi)}{dt} = N_A$$

化简上式,并代入 ε 及 ω^2 的值,得

$$N_A = m \frac{l}{2} (\varepsilon \sin \varphi - \omega^2 \cos \varphi) = m \left(-\frac{3g}{2} \cos \varphi (-\sin \varphi_0 + \frac{3}{2} \sin \varphi) \right)$$

为了求得 N_B ,写出以C为矩心的动量矩定理

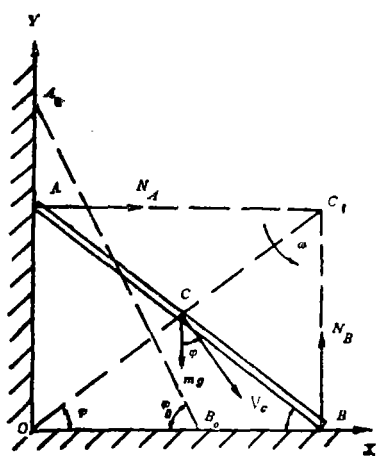


图 8

$$\frac{d(J_c \omega)}{dt} = -N_A \left(\frac{l}{2} \sin \varphi \right) + N_B \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \right)$$

化简上式后，两边都除以 $\cos \varphi$ ，得

$$N_B = N_A \tan \varphi + \frac{1}{4} mg$$

上式中代入 N_A ，即可得

$$N_B = \frac{1}{4} mg - \frac{3}{2} mg \sin \varphi \left(\sin \varphi_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi \right).$$

由此例可见，应用二矩方程组解题，并不比用一矩方程组复杂。

最后，要指出：静力学的二矩方程组和三矩方程组均有附加条件（见本文开始时的表）。那末动力学中的二矩和三矩方程组是否也有附加条件？这里，只要注意到：动量定理和动量矩定理的一矩、二矩和三矩方程组在形式上都是达朗伯原理的微分表达，也就是说，这两种方法所得方程是一样的。就不难得出结论：这里，附加条件也是有的，而且与静力学的二矩、三矩方程组的附加条件是一样的。

ON THE CORRESPONDING RELATIONS BETWEEN STATICS AND DYNAMICS ON MOMENT EQUATIONS

Zhang Zikai

(Department of Water Conservancy, Northwestern Agricultural University)

Abstract

This paper deals with the appranent corresponding relations existed between the rigid dynamics and statics in plane motion theoretically, i. e. there exist three forms of one, two and three moment equations to solve this kind of the problem in dynamics. It is only the momentum law that is used in the projection equation of dynamics and the theory of moment of momentum that is used in moment equations. Thus, this theory is easy to use in solving the practical problems in engineering.

key words: rigid dynamics; statics; corresponding relation