

畦灌水流运动的一个数学模型

王 智

(西北农业大学水利系)

摘 要

本文提出了推算畦灌水流推进过程的一个数学模型。田间试验表明,该模型的平均误差小于4%,最大误差小于10%。根据这个模型,文中还提出了计算改水成数和畦长的公式。

关键词: 水量平衡; 水流推进过程; 改水成数; 合理畦长

畦灌水流运动在水力学上属于非恒定非均匀、透水性底面上明渠水流的一种特殊情况。水流的运动同时受入畦流量、土壤渗吸速度、地面坡度、地面糙度及作物耕作状况等许多因素的影响。以往的计算模型(包括流体动力学模型、零位惯性模型、运动波模型)均难以求解,而且精度并不高^[3],实际应用受到限制。本文提出一种新的模型——水量平衡模型,并给出供实际应用的畦长公式。

1 畦灌水流推进过程

畦灌时,当畦首进水口放水后,水流能迅速淹没沿畦宽方向的裸露地表,并在畦长方向形成一水流锋面,这个锋面沿畦长推动的过程称为推进过程(图1)。水流一面推进,一面向土壤入渗,地面水最终全部转化为土壤水(忽略水面蒸发和侧渗)。

1.1 畦灌地块及水流条件

1.1.1 地块是均匀的。即地面坡度 S_0 、畦宽 W 、地面糙率 n 、土壤入渗特性不随地块内的平面位置而改变,如图1。

1.1.2 地块上游端入畦单宽流量 q 为恒定值。

1.1.3 地块上游部分有正常水深 D_0 。

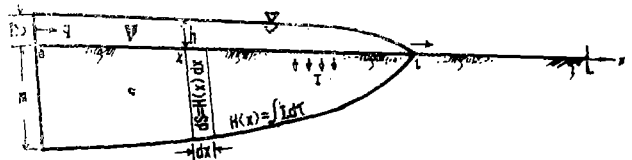


图1 畦灌水流推进过程示意图

1.2 畦灌水流推进过程和入渗

过程的两个经验函数^[3,5]

本文于1986年6月23日收到。

1.2.1 推进函数

$$t = bx^{\phi} \quad (1)$$

其中: x ——给定的推进长度 (m);

t ——水流推进到 x 所用的时间 (min);

b, ϕ ——推进函数经验常数。

1.2.2 入渗函数 (考斯加可夫经验公式)

$$I = K_1 \tau^{-\alpha} \quad (2)$$

其中: I ——渗吸速度 (cm/min);

τ ——渗吸时间 (min);

K_1, α ——入渗函数经验常数。

2 水量平衡方程及解算

如图 1, 设入畦单宽流量为 q , 放水后经时间 t_0 时的水流到达长度 l 。此时单位畦宽上的地表存水量为 V , 入渗到土壤中的水量为 S 。根据水量平衡原理, 流入畦田的水量 qt_0 等于地面存水量 V 和入渗水量 S 之和,

$$qt_0 = V + S \quad (3)$$

2.1 地面存水量 V

如图 1, 设地表面任意一点 x 处的地面水深为 h 。据 Fok et al^[5] 的研究, 地表水面的曲线方程可表示为

$$h = D_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \quad (4)$$

据 (1) 式, 由于 $t_0 = bl^{\phi}$, 则 (4) 式可写为

$$h = D_0 \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^{\phi} \right] \quad (5)$$

对 (5) 式求积分可得地表存水量

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l h dx = D_0 \int_0^l \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^{\phi} \right] dx \\ &= \frac{\phi}{1 + \phi} D_0 l \end{aligned} \quad (6)$$

国内外已报道的试验资料^[2, 3, 5]表明, $1 \leq \phi < 2$, 所以, $\frac{1}{2} D_0 l \leq V < \frac{2}{3} D_0 l$, 其与考斯加可夫^[2]估计的数值 $V \frac{2}{3} D_0 l \leq V \leq \frac{4}{5} D_0 l$ 有差异。

2.2 入渗水量 S

由(2)式,已知渗吸速度为 I ,则在时间 τ 内渗入土壤的总水量(以水层深度表示)为

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \int_0^\tau I d\tau = \int_0^\tau K_0 \tau^{-\alpha} d\tau \\ &= K_0 \tau^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式中,
$$K_0 = \frac{K_1}{1-\alpha}$$

如图1,对于任意一点 x ,水流推进到该点的历时为 t ,则当前锋到达长度 l 时(推进时间为 t_0), x 点经历的渗吸时间为

$$\tau = t_0 - t \quad (8)$$

或

$$\begin{aligned} \tau &= bl^\phi - bx^\phi \\ &= bl^\phi \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^\phi \right] \\ &= t_0 \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^\phi \right] \end{aligned} \quad (9)$$

于是, x 点的渗吸水量为

$$H(x) = K_0 \tau^{1-\alpha} = K_0 t_0^{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^\phi \right]^{1-\alpha} \quad (10)$$

由图1可知,入渗水量为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^l ds = \int_0^l H(x) dx \\ &= K_0 t_0^{1-\alpha} \int_0^l \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^\phi \right]^{1-\alpha} dx \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式可用级数展开式和积分求解,其结果的

$$S = K_0 t_0^{1-\alpha} l F \quad (12)$$

其中, F 为积分常数,与 α , ϕ 两个参数有关,其 Γ 函数解和级数解为

$$F = \frac{1}{\phi} \frac{\Gamma(2-\alpha) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha + \frac{1}{\phi}\right)} \quad (12 \cdot a)$$

或

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{1-\alpha}{1+\phi} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+2\phi)} - \alpha(1-\alpha) \sum_{k=1}^n \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(k+\alpha)}{(k+2)! [1+(k+2)\phi]} \\ &\quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (12 \cdot b)$$

图2为求解 (12.a) 或 (12.b) 式所得的结果

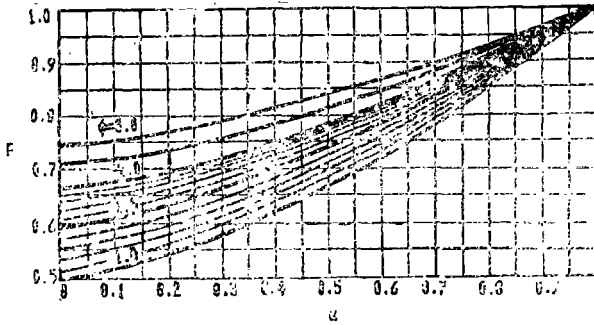


图 2 F值查算图

将 (12) 式和 (6) 式代入 (3) 式得

$$l = \frac{qt_0}{\frac{\phi}{1+\phi}D_0 + FK_0t_0^{1-\alpha}} \tag{13}$$

(13) 式即为推算畦灌水流推进过程的数学模型。已知 $q, K_0, \alpha, D_0, \phi$ ，就可推算任意放水历时 t_0 时的推进长度 l 。

3 模型检验与应用

3.1 模型中几个参数的确定

模型 (13) 中， K_0, α, D_0, ϕ 应预先确定。 K_0, α 为入函数经验常参数，可通过入渗试验得到。

畦田上游部分正常水深 D_0 可用满宁公式计算，畦灌时满宁公式为

$$q = D_0 C \sqrt{RS_0} = D_0 \cdot \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \sqrt{RS_0} \tag{14}$$

其中 R 为水力半径。由于 $D_0 \ll W$ (W 为畦宽，)

所以有

$$R = \frac{WD_0}{W + 2D_0} \approx D_0 \tag{15}$$

则 (14) 式可简化为

$$q = \frac{1}{n} D_0^{5/3} S_0^{1/2} \tag{16}$$

$$D_0 = \left(\frac{nq}{S_0^{1/2}} \right)^{3/5} \tag{17}$$

建议糙率 n 采用美国水保局提供的数值^[4]。

- (1) 光滑、裸露地表 $n=0.04$;
- (2) 小杂粮及近似作物沿畦长纵向播种 $n=0.10$;
- (3) 苜蓿和散播杂粮 $n=0.15$;
- (4) 密生草皮及小杂粮沿畦横向播种时 $n=0.25$.

ϕ 为畦灌水流推进函数的指数。 ϕ 值随单宽流量、地面坡度、土壤入渗特性和种植作物情况变化,作者据陕西渭惠局大量畦灌试验(小麦,中等透水性土壤)资料得到:

$$\phi = 1.77 - 88S_0 - 0.0657q \quad (18)$$

相关系数 $r=0.884$, S_0 为地面坡度; q 为入畦单宽流量 ($L/\min \cdot m$)。陕西洛惠局的资料表明, $\phi = 1.05 \sim 1.43$ ($q=2.86 \sim 9L/\min \cdot m$, $S_0 = \frac{1}{230} \sim \frac{1}{1000}$, 棉花泡地, 小麦冬春灌)。考斯加可夫^[2]的公式表明 $\phi = \frac{1}{\alpha}$

3.2 模型检验

1982年12月,作者于西北农业大学灌溉试验站进行了几组畦灌试验,取其中两组实测资料(编号分别为G、O)检验模型(13)。

例1 G组: 实测 $q=3L/\min$; $K_0=1.88\text{cm}/\min$; $\alpha=0.435$; $D_0=3\text{cm}$ (用自制水深传感仪测量); 推进函数为: $t=bx^{\frac{1}{\alpha}}=0.07x^{1.533}$, 即 $\phi=1.538$

由图2查得, 当 $\alpha=0.435$, $\phi=1.538$ 时, $F=0.73$, 以上值代入(13)式得

$$l = \frac{t_0}{0.101 + 0.0762t_0^{0.565}} \quad (m) \quad (19)$$

其中 t_0 的单位为分, 实测和推算的数值见表1。

例2 O组: $q=3L/\min$, $K_0=1.468\text{cm}/\min$, $\alpha=0.353$; $\phi=2.0$; $F=0.74$ 。代入(13)得

$$l = \frac{t_0}{0.107 + 0.06t_0^{0.667}} \quad (m) \quad (20)$$

检验过程见下表

表中列出了用(19)、(20)式计算的推进长度和实测的推进长度以及相对误差。对于G组实测资料, 数学模型(13)的平均相对误差为3.14%, 对于O组为3.96%, 小于4%。最大误差为9.8%, 最小误差仅为0.3%。因此, 模型(13)的推算准确的。

4 合理畦长的确定

4.1 灌水时间

灌水时间 T 内渗入土壤的水量应与计划灌水定额相等, 即由(7)式

$$H = m = K_0 T^{1-\alpha} \quad (21)$$

则由上式, 灌水时间为

$$T = \left(\frac{m}{K_0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(22)

其中 m 以水层深度 (cm) 表示, K_0 的单位为 cm/min , T 的单位为 min .

表 1 畦灌试验资料及模型检验

实测推进时间 t_0 (min)	实测推进长度 l (m)	计算推进长度 l (m)	相 对 误 差 (%)
G 组			
0.92	5	5.29	5.90
0.52	10	10.98	9.80
4.12	15	15.22	1.50
6.17	20	19.64	1.76
8.53	25	23.90	4.38
11.88	30	29.01	3.30
17.25	35	35.80	2.28
20.07	40	38.91	2.70
26.43	45	45.13	0.30
33.00	50	50.73	1.47
O 组			
0.83	5	5.18	3.6
2.08	10	10.22	2.3
3.33	15	11.01	6.6
5.00	20	18.05	9.7
8.28	25	24.17	3.3
11.33	30	28.65	4.5
15.67	35	33.85	3.3
20.33	40	38.48	3.8
27.37	45	44.30	1.5
33.28	50	48.48	3.0
41.17	55	52.90	3.8
51.33	60	58.73	2.1

4.2 畦长公式

畦首停止放水时, 水流的推进长度可由 (13) 式得到 (此时即 $t_0 = T$)

$$l = \frac{qT}{\frac{\phi}{1+\phi}D_0 + FK_0T^{1-\alpha}} \quad (23)$$

或由(21)式得

$$l = \frac{qT}{\frac{\phi}{1+\phi}D_0 + Fm} \quad (24)$$

对于封闭畦灌,因为灌水必须不发生流失,所以在畦首停止放水时,进入畦田的总水量应与畦长 L 上(见图1)达到灌水定额 m 所需的水量相等,即 $qT = mL$,代入(24)式得

$$\begin{aligned} l &= \frac{mL}{\frac{\phi}{1+\phi}D_0 + mF} = \frac{L}{\frac{\phi}{1+\phi} \frac{D_0}{m} + F} \\ &= \beta L \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\beta = \frac{1}{\frac{\phi}{1+\phi} \frac{D_0}{m} + F} \quad (26)$$

称为改水成数。由(25)式,畦长 L 的计算式为

$$L = \frac{1}{\beta} l \quad (27)$$

公式(22)、(23)、(25)、(26)、(27)即为确定合理畦长的公式。实际中当畦长一定时,可调节单宽流量 q ,以满足要求。

例3 设灌水定额 $m = 40$ 立米/亩,取G组中数据,确定合理畦长。

(1) $m = 40$ 立米/亩 = 6 cm, 则灌水时间

$$T = \left(\frac{m}{K_0} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{6}{1.88} \right)^{\frac{1}{1-0.435}} = 7.8 \text{ (min)}$$

(2) 推进长度

$$\begin{aligned} l &= \frac{qT}{\frac{\phi}{1+\phi}D_0 + Fm} = \frac{0.003 \times 7.8 \times 60}{\frac{1.538}{1+1.538} \times 0.03 + 0.73 \times 0.06} \\ &= 22.65 \text{ (m)} \end{aligned}$$

(3) 改水成数

$$\beta = \frac{1}{\frac{\phi}{1+\phi} \frac{D_0}{m} + F} = \frac{1}{\frac{1.538}{1+1.538} \times \frac{0.03}{0.06} + 0.73} = 0.968$$

(4) 畦长 L

$$L = \frac{1}{\beta} l = \frac{1}{0.968} \times 22.65 = 23.4 \text{ (m)}$$

5 结 语

5.1 本文提出了推算畦灌水流推进过程的数学模型(13)和求解合理畦长的公式(22)(23)、(25)、(26)、(27)。这些公式均涉及到畦长、单宽流量、地面坡度、地面糙度、土壤入渗特性等参数,比较全面地概括了畦灌时各影响因素之间的数学关系。实测数据检验表明,模型(13)的平均误差小于4%,最大误差小于10%。

5.2 建议我国各灌区进行有效的畦灌试验,总结各灌区特定的畦灌技术参数,使用本文方法便可以进行较为科学准确的灌溉设计。

5.3 本文使用的两个经验函数(1)、(2),其形式比较简单,仍有其它形式的函数,特别是入渗函数,有待于进一步的研究。

本文承蒙朱凤书教授、林性粹副教授审改,特此感谢。

参 考 文 献

- 1 栗宗嵩.用水量平衡法求解长畦灌溉水利计算.灌溉排水.1983;3(2):17-26
- 2 考斯加可夫·A·H著.土壤改良原理.高等教育出版社,1954:127-137
- 3 Ram R S, Singh V P. A design procedure for closed end irrigation border, *Agric Water Manage* 1982; 7(5):1-4
- 4 Schwab G O et al. *Water and Soil Conservation Engineering*, 3rd ed, New York, 1981:432-500
- 5 Fok Yu-Si, Bishop A A. Analysis of Water Advance in Surface Irrigation, *Journal of Irrigation and Drainage Division, proceedings of the ASCE*. IRI, 1965:99-115

A MATHEMATICAL MODEL FOR THE FLOWING OF BORDER IRRIGATION WATER

Wang Zhi

(Department of Water Conservancy, Northwestern Agricultural University)

Abstract

A mathematical model was presented for predicting the advancing ghrase of the border irrigation water. Field experiments indicated that the average errors of the model were less than 4%, and that the maximum errors were less than 10%. Based on this model, the formulas for predicting water cutoff ratio and the length of border were proposed in this paper.

key words: water balance; the advancing ghrase; water cutoff ratio; reasonable border length