网络出版时间:2017-03-07 11:17 DOI:10.13207/j.cnki.jnwafu.2017.04.031
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1390.S.20170307.1117.062.html

三角形明渠水跃共轭水深的近似解法

赵延风,王 羿,王正中

(西北农林科技大学 水利与建筑工程学院,陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 【目的】推求三角形断面共轭水深的近似计算公式,为梯形断面共轭水深的简捷求解提供参考。【方法】根据三角形断面特征,选取无量纲共轭水深作为参数,首先对用于判别三角形明渠水跃类型的弗劳德数计算公式进行推导,然后对三角形明渠水跃共轭水深方程进行化简,得到三角形断面第二共轭水深的迭代计算公式;在工程常用范围内,通过假设无量纲跃前水深,用迭代公式计算跃后水深,再根据对应的无量纲共轭水深值,利用 Matlab 软件进行函数配线拟合。【结果】在对共轭水深求解方法进行分析研究的基础上,选用了 2 个二次多项式之比的形式作为三角形明渠共轭水深的近似计算公式,该式在跃后水深与跃前水深比 $y/x\in(1,85)$时,跃前水深最大相对误差小于 0.20%,跃后水深最大相对误差小于 0.17%。【结论】推导的三角形断面共轭水深近似计算公式可用于跃后与跃前水深的求解,为梯形断面共轭水深的简化计算提供了新的途径。

[关键词] 三角形明渠;水跃;共轭水深;近似解法

[中图分类号] TV131.4 [文献标志码] A [文章编号] 1671-9387(2017)04-0230-05

Approximate method for conjugate depths calculation in triangular open channel

ZHAO Yanfeng, WANG Yi, WANG Zhengzhong

(*College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract:【Objective】A formula for approximate calculation of conjugate depths in triangle channel was developed to provide basis for further study of simple solution for conjugate depths in trapezoidal channel.【Method】According to the feature of triangular open channel, the dimensionless conjugate depth was selected as parameter. The Froude number calculation formula was deduced and used to distinguish types of hydraulic jump. Then, the iteration formula for the downstream depth was deduced by simplifying conjugate depth equation in triangle channel. With the iteration formula, the downstream depth was calculated by assigning series of the dimensionless upstream depth in the range of project application. Fitting was also conducted with a range of corresponding dimensionless conjugate depths using Matlab.【Result】Based on the analysis of solving scheme of conjugate depth, the final formula was expressed in terms of ratio of two quadratic polynomials. When the ratio of downstream depth to upstream depth was 1-85, the maximum relative error of calculated upstream depth was less than 0.20% and that of calculated downstream depth was less than 0.17%.【Conclusion】The formula can solve both the downstream depth and upstream depth, which provides a new option for simplified calculation of conjugate depths in trapezoidal channel.

Key words: triangular open channel; hydraulic jump; conjugate depths; approximate solution method

---

[收稿日期] 2016-01-30
[基金项目] 国家科技支撑计划项目(2012BAD10B02)
[作者简介] 赵延风(1963-),男,陕西西安人,副研究员,主要从事水资源开发利用工程水力学研究。E-mail:zhaoyf2016@163.com
[通信作者] 王正中(1963-),男,陕西彬县人,教授,博士生导师,主要从事水工结构工程及工程水力学研究。
E-mail:wangzz0910@163.com

水跃是水流从急流过渡到缓流时水面突然跃起的局部水力现象，在闸、坝及陡槽等泄水建筑物下游，常有水跃发生，水跃共轭水深的计算问题在水工消能设计中具有重要意义，是消能计算和水跃长度计算中不可缺少的内容。除矩形明渠共轭水深有形式比较简单的解析解[1]外，其他断面的水跃共轭水深一般需要求解高次方程或者超越方程，无法直接求解。目前对于共轭水深研究的渠道断面形式多集中在梯形断面，但是就其共轭水深研究方面的成果还存在诸多问题，梯形断面共轭水深方程为一元五次方程，经数学变换可简化成一元四次方程，进而经过变量代换简化成一元三次方程进行求解，求解过程非常复杂[2-5]。现有的近似公式，如采用数据分析归纳方法[6]、非线性优化方法[7]以及牛顿迭代法[8]得到的计算公式，也存在公式复杂、误差大的缺点；文献[9-12]多采用简单迭代法计算或者优化中间变量方法进行求解，公式也比较复杂。鉴于目前的状况，对梯形断面渠道共轭水深的计算还需深入研究。由于梯形断面是介于矩形断面和三角形断面之间的断面形式[10]，当单位水面宽度趋近 1^+ 时，梯形断面趋向矩形断面；当单位水面宽度趋向 $+\infty$ 时，梯形断面趋向三角形断面。为了给梯形断面共轭水深研究提供基础性工作，本研究将探讨三角形断面渠道共轭水深的求解问题，使其计算公式达到简单、通用和精度高的优点。

对于三角形断面共轭水深的研究最早可追溯到 20 世纪 80 年代，如 Hager 等[13]在 1987 年对共轭水深通过模型进行观察验证。近年来一些学者也进行了相关研究，如 Achour 等[14]在 2003 年通过对开口 90°的三角形渠道水跃的控制进行了试验分析；Vatankhah 在 2010 年提出三角形渠道渐变流水面尺寸的解析解计算公式[15]，2012 年又提出了三角渠道中沿矩形侧堰的水面轮廓曲线的解析解[16]；Vatankhah 等[17]在 2010 年将三角形渠道的水跃方程进行适当变换，利用费拉里公式求出共轭水深方程的解析解；Rashwan[18]在 2013 年给出了三角形断面水跃共轭水深隐函数公式，再将隐函数转化为近似显函数，但是通过试算法求得中间变量参数的公式非常复杂。在国内，2008 年倪汉根等[19]采用水跃共轭水深比化简共轭水深方程，给出了三角形断面水跃共轭水深的解析解。总之，对于三角形断面渠道水跃共轭水深的研究，国内外的这些研究成果，都存在计算公式复杂、精度低、适用范围小的缺点。为避免试算或繁琐的解析解求解过程，本研究拟提出一种近似的计算公式。在工程可能应用的范围内，通过假设无量纲跃前水深，迭代计算跃后水深，再将该区间内对应的共轭水深值应用 Matlab 软件进行优化拟合，以期得到共轭水深的近似计算公式，进而为工程应用提供参考，为梯形断面共轭水深的解法提供基础性研究工作。

1　三角形明渠的临界水深及弗劳德数

1.1　三角形明渠的临界水深

在求解共轭水深时要用到临界水深，三角形渠道的临界水深有解析解表达式，而且形式简单。临界水深的基本公式[1]为：

$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A_k{}^3}{B_k}。\tag{1}$$

式中：Q 为流量，m^3/s；g 为重力加速度，一般取9.81 m/s^2；A_k 为发生临界水深时三角形过水断面面积，m^2；B_k 为发生临界水深时的水面宽度，m。

三角形断面面积和水面宽度可表示为：

$$\begin{cases}A_k=mh_k{}^2,\\ B_k=2mh_k。\end{cases}\tag{2}$$

式中：h_k 为临界水深，m；m 为断面的边坡系数。

将式(2)代入式(1)并整理得：

$$h_k=\left(\frac{2Q^2}{gm^2}\right)^{0.2}。\tag{3}$$

式(3)即为三角形明渠临界水深的解析表达式。

1.2　三角形明渠弗劳德数的计算公式

弗劳德数在水力学中是一个十分重要的判别参数，水跃的形式与跃前断面水流的弗劳德数有关，可根据弗劳德数判别水跃形式。跃前弗劳德数的计算公式[1]为：

$$F_{r1}=\frac{Q}{A_1\sqrt{g\bar{h}_1}}。\tag{4}$$

$$\begin{cases}A_1=mh_1{}^2,\\ A_2=mh_2{}^2。\end{cases}\tag{5}$$

$$\begin{cases}B_1=2mh_1,\\ B_2=2mh_2。\end{cases}\tag{6}$$

式中：F_{r1} 为跃前断面处弗劳德数；A_1、A_2 分别为跃前、跃后三角形过水断面面积，m^2；h_1、h_2 分别为跃前、跃后断面水深，m；$\bar{h}_1$ 为跃前断面平均水深，m；B_1、B_2 分别为跃前、跃后三角形过水断面水面宽度，m。

三角形明渠跃前断面的平均水深为：

$$\bar{h}_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{h_1}{2}。\tag{7}$$

将式(5)、(7)中 A_1、$\bar{h}_1$ 代入式(4)，得：

$$F_{r1}=\left[\left(\frac{2Q^2}{gm^2}\right)^{0.2}\right]^{2.5}\cdot\frac{1}{h_1^{\ 2.5}}。\tag{8}$$

将式(3)代入式(8),得跃前弗劳德数为:

$$F_{r1}=(h_k/h_1)^{2.5}。\tag{9}$$

同理,跃后弗劳德数为:

$$F_{r2}=(h_k/h_2)^{2.5}。\tag{10}$$

设无量纲共轭水深分别为 x、y,其意义分别为跃前水深和跃后水深与临界水深的比值,即:

$$\begin{cases}x=h_1/h_k,\\ y=h_2/h_k。\end{cases}\tag{11}$$

则跃前和跃后弗劳德数计算公式为:

$$\begin{cases}F_{r1}=1/x^{2.5},\\ F_{r2}=1/y^{2.5}。\end{cases}\tag{12}$$

2 三角形明渠共轭水深的近似解法

共轭水深近似计算公式的获得方法:在工程常用范围内,假设无量纲跃前水深值为 x,通过迭代计算求出对应的无量纲跃后水深 y。根据对应的 x、y 值,应用 Matlab 软件进行优化拟合,得到其显式计算式。

2.1 三角形明渠共轭水深方程

共轭水深的基本方程为:

$$\frac{Q^2}{gA_1}+A_1h_{c1}=\frac{Q^2}{gA_2}+A_2h_{c2}。\tag{13}$$

式中:h_{c1}、h_{c2} 分别为跃前、跃后三角形过水断面形心点水深,m。

三角形断面形心点水深的计算公式为:

$$\begin{cases}h_{c1}=h_1/3,\\ h_{c2}=h_2/3。\end{cases}\tag{14}$$

又由式(11)得:

$$\begin{cases}h_1=xh_k,\\ h_2=yh_k。\end{cases}\tag{15}$$

将式(5)、(14)、(15)、(3)代入式(13),整理得三角形明渠共轭水深方程为:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^3=\frac{1}{y^2}+\frac{2}{3}y^3。\tag{16}$$

2.2 跃后水深的迭代方程

引入无量纲共轭水深函数 ψ,并令式(16)恒等于 $1/\psi$,则有:

$$\frac{1}{x^{-2}+\frac{2}{3}x^3}=\psi。\tag{17}$$

或:

$$\frac{1}{y^{-2}+\frac{2}{3}y^3}=\psi。\tag{18}$$

由式(17)得无量纲跃后水深的迭代公式为:

$$y=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{\psi}-1\right)\right]^{0.2}。\tag{19}$$

2.3 跃后水深迭代公式的收敛性证明

根据迭代理论[20],如果方程 $x=\varphi(x)$ 的一个根为 α,则迭代公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛于 α 的条件是:在 α 的某一临域 $|x-\alpha|<\delta$ 内,迭代函数的一阶导数的绝对值小于1,即 $|\varphi'(x)|<1$,那么以该临域内任一点为初值的迭代都收敛于 α。因此,只要证明以上迭代函数的一阶导数的绝对值小于1,就可以证明该迭代函数是收敛的。

对式(19),设:

$$y=\varphi(y)。\tag{20}$$

则:

$$\varphi(y)=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{\psi}-1\right)\right]^{0.2}。\tag{21}$$

对式(21)求一阶导数并整理得:

$$\varphi'(y)=\frac{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{\psi}-1\right)\right]^{0.2}}{\left(\frac{y^2}{\psi}-1\right)}\times\frac{0.4y}{\psi}。\tag{22}$$

将式(20)、(21)代入式(22)得:

$$\varphi'(y)=\frac{0.4}{(y^2/\psi-1)}\times\frac{y^2}{\psi}=\frac{0.4}{(1-\psi/y^2)}。\tag{23}$$

因为 $\psi\in(0,0.6)$,$y\in(1,+\infty)$,所以 $\psi/y^2<0.6$。由此可知:

$$(1-\psi/y^2)>0.4。\tag{24}$$

由式(23)、(24)得:

$$|\varphi'(y)|<1。\tag{25}$$

根据迭代理论[20],迭代公式(19)对任意正数 y 均收敛。

2.4 三角形明渠共轭水深的近似计算公式

关于无量纲跃前共轭水深 x 的取值范围,由共轭水深函数可知,跃前水深不大于临界水深,故无量纲跃前水深 x 的定义域为 $x\in(0,1)$,则由式(17)可以得出无量纲共轭水深函数 ψ,其取值范围为 $\psi\in(0,0.6)$。考虑到实际工程情况,水深太小已无实际意义,其范围可取为 $x\in(0.075,1.0)$,通过式(17)可求出与 x 对应的 ψ 值,再将每一个 ψ 值代入式(19)中进行迭代计算,求出对应的 y 值,由此通过共轭水深函数 ψ 可得到在 x 取值范围内与之对应的一系列 y 值。经过计算,当 x 取值范围为 $x\in(0.075,1.0)$ 时,y 的取值范围为 $y\in(1.0,6.43)$,此时,跃后水深与跃前水深比范围为 $y/x\in(1,85)$,这个取值范围涵盖了工程上可能出现的所有范围。将与同一 ψ 值对应的 x、y 值用 Matlab 软件进行配线拟合,

以最大误差的绝对值最小为目标，得到最优的非线性函数表达式，即无量纲跃后水深函数为：

$$y=\frac{-0.84x^2+2.68x+0.82}{x^2+1.63x+0.03}。\tag{26}$$

在已知无量纲跃前水深 x 时，通过式(26)可求出无量纲跃后水深 y；如果已知无量纲跃后水深 y，可通过整理式(26)后，解一元二次方程求出无量纲跃前水深 x。

3　近似公式简捷性、通用性及精度评价

3.1　公式的简捷性比较

前文已述及，三角形明渠水跃共轭水深求解方法有 2 种：解析法和近似公式法。解析法一般是将五次水跃方程化简成一元四次方程，利用一元四次方程的求解公式得到解析解，最常用的是费拉里公式，这些方法求解过程都很复杂。目前的近似公式法，如 Rashwan[18] 公式，不但公式复杂，而且适用范围小、误差大。本研究中近似公式(26)，是目前少有的用 1 个公式可求 2 个水深的近似解公式，即在已知跃前水深时求解跃后水深，或者在已知跃后水深时求解跃前水深。

3.2　公式的适用范围

三角形共轭水深解析解公式适用范围为 $x\in(0,1)$、$y\in(1,+\infty)$，$y/x\in(1,+\infty)$，$\psi\in(0,0.6)$；Rashwan[18] 近似公式适用范围为 $x\in(0.32,1)$、$y\in(1,2.43)$，$y/x\in(1,7.61)$，$\psi\in(0.102,0.6)$；本文近似公式适用范围为 $x\in(0.075,1)$、$y\in(1,6.43)$，$y/x\in(1,85)$，$\psi\in(0.005\ 6,0.6)$，共轭水深函数的有效适用范围接近解析解范围。

3.3　公式的计算精度

无量纲跃前水深 x 和无量纲跃后水深 y 的相对误差分布如图 1 所示。

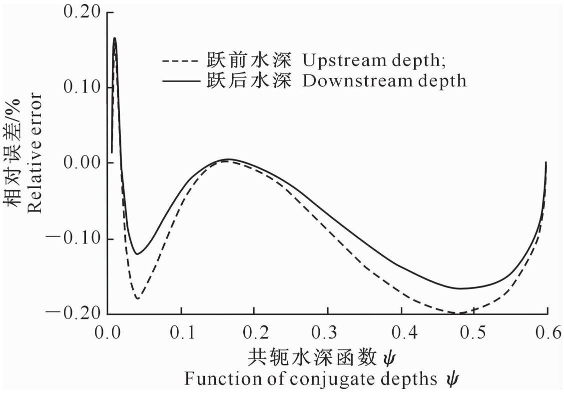

图 1　共轭水深相对误差分布

Fig. 1　Distribution of relative error of conjugate depths

从误差分析和图 1 可以看出，跃前水深相对误差普遍略大于跃后水深的相对误差，但是跃前水深的最大相对误差不超过0.20%，跃后水深的最大相对误差不超过 0.17%。

4　应用举例

例：某平底三角形断面渠道上安装了一个平板闸门，当闸门开启至某一开度时，下游发生水跃，此时通过流量为 $Q=20\ \mathrm{m^3/s}$，若跃前断面水深 $h_1=0.6\ \mathrm{m}$，三角形断面边坡系数 $m=1.2$，求跃后断面水深 h_2（重力加速度取 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$）。

解：由式(3)求得临界水深为：

$$h_k=\left(\frac{2Q^2}{gm^2}\right)^{0.2}=2.242\ \mathrm{m}。$$

由式(11)求得无量纲跃前水深为：

$$x=\frac{h_1}{h_k}=0.267。$$

将 $x=0.267$ 代入式(26)中，得：

$$y=\frac{-0.84x^2+2.68x+0.82}{x^2+1.63x+0.03}=2.746。$$

由式(15)得跃后水深为：

$$h_2=yh_k=6.157\ \mathrm{m}。$$

跃后水深数值解为 $h_2=6.162\ \mathrm{m}$，相对误差小于 0.08%。

如果已知跃后水深为 $h_2=6.162\ \mathrm{m}$，求跃前水深：则根据式(11)得无量纲跃后水深 $y=2.748$，将该值代入式(26)中整理得：

$$3.588x^2+1.799x-0.738=0。$$

解一元二次方程得 $x=0.267\ 5$，由式(15)得跃前水深 $h_1=0.599\ 7\ \mathrm{m}$，跃前水深真值为 0.6 m，其相对误差小于 0.05%。

5　结　论

三角形明渠共轭水深方程是一元五次方程，由目前共轭水深计算得到解析解，求解过程非常复杂。本研究根据三角形水跃断面水跃函数方程，利用跃前水深、跃后水深与临界水深的比值，化简共轭水深方程，通过对共轭水深方程进行数学变换，得到跃后水深的迭代方程。在工程常用范围内，给出跃前水深，由迭代公式求出对应的跃后水深，根据跃前水深和跃后水深一一对应的共轭水深值，利用 Matlab 软件进行非线性函数拟合，得到了最优的共轭水深近似计算公式，该公式具有以下特点：

1)形式简单。公式具有跃前水深和跃后水深使用同一个公式求解的特点，而目前几乎所有水跃共

轭水深近似计算公式中,跃前水深和跃后水深均采用2个公式计算。

2)适用范围大。理论上三角形断面跃后水深与跃前水深比 $y/x \in (1,+\infty)$,目前给出的公式范围一般为 $y/x \in (1.5,30)$ 甚至更小,本研究公式可达到 $y/x \in (1,85)$。目前所给出的水跃共轭水深的近似计算公式适用于弗劳德数均大于1.7的情况,当跃前弗劳德数小于1.7时,即无量纲跃后与跃前水深比 $y/x \in (1.5,1)$ 时为波状水跃而无法计算,而使用本研究公式均可计算;当然跃后水深与跃前水深比达到85时已为超强水跃,工程上已经很难再出现比此更强的水跃,因此该公式在工程应用上可与解析解公式媲美。

3)计算精度高。在跃后水深与跃前水深比 $y/x \in (1,85)$ 时,共轭水深的最大相对误差小于0.20%,公式误差很小,应用非常方便。

[参考文献]

[1] 吴持恭.水力学(上册)[M].2版.北京:高等教育出版社,1979.
Wu C G. Hydraulics(Book one) [M]. 2nd ed. Beijing: High Education Press, 1979.

[2] 王兴全.梯形明渠水跃共轭水深的计算 [J].农田水利与小水电,1989(9):16-18.
Wang X Q. Calculation method of conjugate depth in trapezoidal open channel [J]. Irrigation and Drainage and Small Hydropower Station, 1989(9):16-18..

[3] 辛孝明.平底梯形明渠水跃共轭水深的直接计算法 [J].山西水利科技,1997,117(3):59-63.
Xin X M. The direct calculation of the conjugate depth of the trapezoidal canal with flat bottom [J]. Shanxi Hydraulic Science & Technology, 1997, 117(3):59-63.

[4] Das A. Solution of specific energy and specific force equations: trapezoidal and triangular channels [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE, 2007, 134(4):407-410.

[5] Vatankhah A R. Analytical solution of specific energy and specific force equations: trapezoidal and triangular channels [J]. Adv Water Res, 2010, 33:184-189.

[6] 孙道宗.梯形断面渠道中水跃共轭水深计算 [J].江西水利科技,2003,29(3):133-137.
Sun D Z. Calculation method of conjugate depth in trapezoidal section channel [J]. Jiangxi Hydraulic Science & Technology, 2003, 29(3):133-137.

[7] 金菊良,付 强,魏一鸣,等.梯形明渠水跃共轭水深的优化计算 [J].东北农业大学学报,2002,33(1):58-60.
Jin J L, Fu Q, Wei Y M, et al. Optimal computation for conjugate water depth of hydraulic jumps in trapezoidal channels [J]. Journal of Northeast Agricultural University, 2002, 33(1):58-60.

[8] 张小林,刘惹梅.梯形断面渠道水跃共轭水深的计算方法 [J].水利与建筑工程学报,2003,1(2):41-43.
Zhang X L, Liu R M. Method of calculation for conjugate water depth of water jump in trapezoid channel [J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2003, 1(2):41-43.

[9] 刘 玲,刘伊生.梯形渠道共轭水深计算方法 [J].北方交通大学学报,1999,23(3):44-47.
Liu L, Liu Y S. Calculating method for conjugate depth of hydraulic jump in trapezoidal channels [J]. Journal of Northern Jiaotong University, 1999, 23(3):44-47.

[10] 赵延风,王正中,芦 琴,等.梯形明渠水跃共轭水深的直接计算方法 [J].山东大学学报(工学版),2009,39(2):131-136.
Zhao Y F, Wang Z Z, Lu Q, et al. Direct calculation method for conjugate water depth of the trapezoidal open channel [J]. Journal of Shandong University (Engineering Science Edition), 2009, 39(2):131-136.

[11] Kozin V N. Hydraulic jump in a prismatic channel with a trapezoidal cross section [J]. Fluid Mechanics Research, 1992, 21(2):80-84.

[12] 刘计良,王正中,杨晓松,等.梯形渠道水跃共轭水深理论计算方法初探 [J].水力发电学报,2010,29(5):216-219.
Liu J L, Wang Z Z, Yang X S, et al. Preliminary study on the theoretical method for calculating conjugate depth of trapezoidal channel [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2010, 29(5):216-219.

[13] Hager W H, Wanoschek R. Hydraulic jump in triangular channel [J]. Journal of Hydraulic Research, 1987, 25(5):349-365.

[14] Achour B, Debabeche M. Control of hydraulic jump by sill in triangular channel [J]. Journal of Hydraulic Research, 2003, 41(3):319-325.

[15] Vatankhah A R. Analytical integration of the equation of gradually varied flow fortriangular channels [J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2010, 21(4):546-549.

[16] Vatankhah A R. Analytical solution for water surface profile along a side weir in a triangular channel [J]. Measurement and Instrumentation, 2012, 23(1):76-79.

[17] Vatankhah A R, Omid M H. Direct solution to problems of hydraulic jump in horizontal triangular channels [J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23:1104-1108.

[18] Rashwan I M H. Analytical solution to problems of hydraulic jump in horizontal triangular channels [J]. Ain Shams Engineering Journal, 2013, 4:365-368.

[19] 倪汉根,刘亚坤.击波 水跃 跌水 消能 [M].辽宁大连:大连理工大学出版社,2008.
Ni H G, Liu Y K. Shock wave / hydraulic jump / drop water/ energy dissipation [M]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology Press, 2008.

[20] 关 治,陈景良.数值计算方法 [M].北京:清华大学出版社,1990.
Guan Z, Chen J L. Value computational method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.