

# 复杂边界大尺度流场模拟中同位网格的实施

吴 巍,周孝德,王新宏,程 文,冯民权

(西安理工大学 西北水资源与环境生态教育部重点实验室,陕西 西安 710048)

**【摘要】**【目的】针对目前常用的复杂边界大尺度流场模拟方法(构建基于正交曲线坐标变换和交错网格的数学模型)的不足,构建具有更强适应性及更高效率的数学模型。【方法】以沿水深平均的平面二维水流运动数学模型为基本讨论模型,在复杂边界大尺度流场模拟中引入同位网格,给出了一般曲线坐标系下平面二维水流运动控制方程的通用转换形式及基于同位网格的通用离散方程,研究了一般曲线坐标系下基于同位网格 SIMPLE 算法的实施办法。【结果】构建了一般曲线坐标系下基于同位网格布置计算变量的数学模型,并将其运用到新疆博斯腾湖流场模拟的计算实例中,结果显示,计算成果合理可靠,与实际情况相符。【结论】在具有复杂边界大尺度流场模拟中成功实施了同位网格,其算法可以用于解决天然河流、湖泊、水库及河口海岸等的流场模拟问题。

**【关键词】** 复杂边界;大尺度流场;同位网格

**【中图分类号】** TV131.4

**【文献标识码】** A

**【文章编号】** 1671-9387(2010)05-0209-08

## Collocated grid implementation in the large scale flow field simulation with complex boundary

WU Wei,ZHOU Xiao-de,WANG Xin-hong,CHENG Wen,FENG Min-quan

(Key Lab of Northwest Water Resources and Environment Ecology of MOE at XAUT,Xi'an,Shaanxi 710048,China)

**Abstract:** 【Objective】 In the large scale flow field simulation with complex boundary, a more compatible and more efficient mathematical model is built due to the shortage of domestic and foreign common method (to build the model which is based on the orthogonal curvilinear coordinates and staggered grid). 【Method】 Taking the depth-averaged two-dimensional hydrodynamic numerical model as basic discussion model, the collocated grid is brought into the large scale flow field simulation with complex boundary. 【Result】 The model is built based on the collocated grid in the general curvilinear coordinates. And it is applied to simulate the flow field of Bosten Lake in Xinjiang. The calculation result is reasonable and reliable, and in line with the actual situation. 【Conclusion】 The collocated grid is successfully implemented in the large scale flow field of the complex boundary. And the method has strong compatibility and high effectiveness in simulating the flow field of natural river, lake, reservoir, estuary and coast, etc.

**Key words:** complex boundary; large scale flow field; collocated grid

天然河流、湖泊、水库及河口海岸等的边界曲折、地形复杂,且其水平尺度或深度尺度通常均较大,对于这种具有复杂不规则边界的大尺度流场模拟计算,目前最常用的方法是构建基于正交曲线坐标变换和交错网格的数学模型,并采用 SIMPLE 算

法来进行求解。在这类模型中,一般采用正交曲线坐标变换来处理复杂不规则边界问题,运用交错网格布置计算变量,以解决模型动量方程离散求解中可能出现的水位波动问题。上述方法虽然运用比较普遍,但不可避免地存在以下 2 方面的问题。

\* [收稿日期] 2009-11-09

[基金项目] 国家重大水专项研究项目(2009ZX07212-002-001);国家自然科学基金项目(50579061)

[作者简介] 吴 巍(1980—),男,山西寿阳人,博士,主要从事水力学及河流动力学研究。E-mail:wuweifirst@126.com

(1)运用正交曲线坐标变换来处理复杂不规则边界问题时,对计算网格的正交性要求较高,但是在工程实际运用中,形成完全正交的曲线网格是非常困难的,这样在计算中就会不可避免地引入近似误差,进而影响模型计算精度,也在一定程度上制约了模型的适应性。

(2)运用交错网格布置计算变量,虽可以有效地解决水位波动问题,但即便是对于二维问题而言,计算变量仍需要被分别布置在网格系统中的 3 套网格上,各自的节点编号及其相互间协调关系比较复杂。同时,由于复杂网格编号系统的寻址和插值计算,使程序编制和离散方程系数计算的工作量大幅增加,影响了计算效率。

鉴于上述问题,本研究在复杂边界大尺度流场模拟中引入同位网格,并着重研究了一般曲线坐标变换(非正交曲线坐标变换)下基于同位网格的 SIMPLE 算法实施问题。在由此方法构建的模型中,为了更好地拟合天然流场的复杂边界,一般曲线坐标变换放弃了对计算网格正交性的要求,使得构建的数学模型具有更强的适应性;同时,由于同位网格系统将所有求解变量都布置在同一套网格中,从而使得程序编制和离散方程系数计算的工作量大幅减少,提高了计算效率。

在针对天然河流、湖泊、水库及河口海岸水流运动规律,河床冲淤演变过程,污染物输移等实际工程问题的模拟计算中,目前应用最为广泛的是平面二维水流运动数学模型。本研究选取平面二维水流运动数学模型为基本讨论模型,就复杂边界大尺度流场模拟计算中同位网格的实施方法进行推导,并将此研究成果运用到新疆博斯腾湖流场模拟计算实例中,旨在为解决复杂边界大尺度流场模拟问题提供一个适应性更强、效率更高的途径。

## 1 平面二维水流运动数学模型的控制方程

为推导之便,以下分别给出直角坐标系下以及经一般曲线坐标变换后平面二维水流运动数学模型的控制方程。

### 1.1 直角坐标系下的模型控制方程<sup>[1]</sup>

水流连续方程为

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

水流动量方程为

$$x \text{ 方向: } \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(huu)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} + gh \frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$g \frac{u \sqrt{u^2+v^2}}{C^2} = v_i h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (2a)$$

$$y \text{ 方向: } \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hvv)}{\partial y} + gh \frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$g \frac{v \sqrt{u^2+v^2}}{C^2} = v_i h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (2b)$$

式中: $z$  为水位, $h$  为垂线水深, $u$ 、 $v$  分别为垂线平均流速在  $x$ 、 $y$  方向的分量, $C$  为谢才系数, $v_i$  为水流紊动粘滞系数。

将方程(1)、(2)整理为如方程(3)所示的标准对流~扩散方程统一形式:

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(hU\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(hV\varphi)}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\varphi h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\varphi h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + S_\varphi.$$

式中: $\varphi$  为通用变量; $\Gamma_\varphi$  为扩散系数; $S_\varphi$  为源项,通过对源项进行负坡线性化处理后可写为: $S_\varphi = S_{\varphi C} + S_{\varphi P} \varphi_P$ 。

直角坐标系下平面二维水流运动通用控制方程(3)中通用变量  $\varphi$ 、扩散系数  $\Gamma_\varphi$  及源项  $S_\varphi$  的表达式分别如下。

水流连续方程: $\varphi=1, \Gamma_\varphi=0, S_\varphi=0$ 。

水流动量方程:

$x$  方向  $\varphi=u, \Gamma_u=\nu_t, S_u=S_{uC} + S_{uP} \varphi_P$ ,

$$S_{uC} = -gh \frac{\partial z}{\partial x}, S_{uP} = -\frac{g}{C^2} \sqrt{u^2+v^2};$$

$y$  方向  $\varphi=v, \Gamma_v=\nu_t, S_v=S_{vC} + S_{vP} \varphi_P$ ,

$$S_{vC} = -gh \frac{\partial z}{\partial y}, S_{vP} = -\frac{g}{C^2} \sqrt{u^2+v^2}.$$

### 1.2 一般曲线坐标系下的模型控制方程

利用函数的导数与其反函数导数之间的关系以及函数链式求导法则,可以将直角坐标系下的模型通用控制方程(3)转换,得到一般曲线坐标系下的模型通用控制方程<sup>[2]</sup>(4):

$$J \frac{\partial(h\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(hU\varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(hV\varphi)}{\partial \eta} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha \frac{\Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \gamma \frac{\Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + S_\varphi.$$

式中:Jacobi 因子  $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ ,  $U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $V = -u \frac{\partial y}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \xi}$ ,  $\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$ ,  $\gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2$ , 其余符号意义同前。

方程(4)中,通用变量  $\varphi$ 、扩散系数  $\Gamma_\varphi$  及源项  $S_\varphi$  针对各个独立控制方程的表达式分别如下。

水流连续方程:  $\varphi = 1, \Gamma_\varphi = 0, S_\varphi = 0$ 。

水流动量方程:

$\xi$  方向  $\varphi = u, \Gamma_u = \nu_t, S_u = S_{uc} + S_{up}\varphi_P$ ,

$$S_{uc} = -gh \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right),$$

$$S_{up} = -\frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} J;$$

$\eta$  方向  $\varphi = v, \Gamma_v = \nu_t, S_v = S_{vc} + S_{vp}\varphi_P$ ,

$$S_{vc} = -gh \left( -\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right),$$

$$S_{vp} = -\frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} J.$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

## 2 模型通用控制方程的离散

在模型通用控制方程的离散中引入同位网格, 采用同位网格布置计算变量, 将流速  $u, v$  及水位  $z$  等物理量均存储于控制体积的同一网格节点上, 如图 1 所示。由图 1 可以看出, 同位网格系统的实质即是普通的网格系统, 该系统只存在一种类型的控制体积, 所有变量均在此控制体积的中心处定义和存储, 所有控制方程均在该控制体积上进行离散。

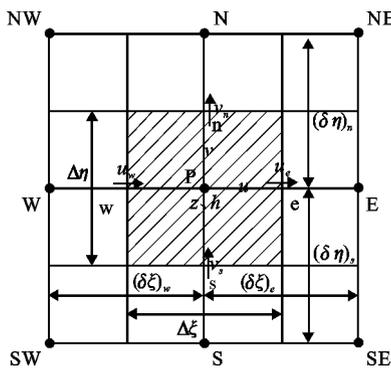


图 1 同位网格中控制体积示意图

Fig. 1 Sketch map of control volume in the collocated grid

依据有限体积法的原理, 将方程 (4) 在如图 1 所示的控制体积内沿时间和空间进行积分, 并对源项进行负坡线性化处理, 经整理后即得到一般曲线坐标系下基于同位网格的平面二维水流运动通用控制方程的离散方程<sup>[2-10]</sup> (5):

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b. \quad (5a)$$

$$\text{简记为 } a_P \varphi_P = \sum a_{nb} u_{nb} + b. \quad (5b)$$

式中:  $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s +$

$$a_P^0 - S_{\varphi P} \Delta \xi \Delta \eta; b = a_P^0 \varphi_P^0 + S_{\varphi C} \Delta \xi \Delta \eta (a_P^0 = J \frac{h_P^0}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta,$$

上标“0”表示计算变量在  $t$  时刻的值);  $a_E = D_e A (|Pe_e|) + \max(-F_e, 0)$ ;  $a_W = D_w A (|Pe_w|) + \max(F_w, 0)$ ;  $a_N = D_n A (|Pe_n|) + \max(-F_n, 0)$ ;  $a_S = D_s A (|Pe_s|) + \max(F_s, 0)$ 。

其中, 参数  $F$  表示通过单位控制体积界面上的对流质量通量; 参数  $D$  表示控制体积界面的扩散传导性;  $Pe$  为 Peclet 数,  $Pe = F/D$ , 表示对流与扩散的强度比。控制体积界面上的  $F, D$  以及  $Pe$  分别为:

$$\left\{ \begin{aligned} F_e &= (hU)_e \Delta \eta, F_w = (hU)_w \Delta \eta, \\ F_n &= (hV)_n \Delta \xi, F_s = (hV)_s \Delta \xi; \\ D_e &= \left( \frac{\alpha \Gamma_\varphi h}{J} \right)_e \frac{\Delta \eta}{(\xi \eta)_e}, \\ D_w &= \left( \frac{\alpha \Gamma_\varphi h}{J} \right)_w \frac{\Delta \eta}{(\xi \eta)_w}, \\ D_n &= \left( \frac{\gamma \Gamma_\varphi h}{J} \right)_n \frac{\Delta \xi}{(\xi \eta)_n}, \\ D_s &= \left( \frac{\gamma \Gamma_\varphi h}{J} \right)_s \frac{\Delta \xi}{(\xi \eta)_s}; \\ Pe_e &= F_e / D_e, Pe_w = F_w / D_w, \\ Pe_n &= F_n / D_n, Pe_s = F_s / D_s. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

此外, 函数  $A(|Pe|)$  的计算可以采用美国学者 Patankar 于 1980 年提出的乘方格式<sup>[11]</sup>, 该格式规定: 当  $|Pe| \geq 10$  时, 扩散项的影响置于零; 当  $|Pe| < 10$  时, 通过控制体界面的流量按 5 次幂的乘方格式计算, 即  $A(|Pe|) = \max[0, (1 - 0.1|Pe|)^5]$ 。

## 3 基于同位网格的 SIMPLE 算法实施

SIMPLE 算法最初是基于平面直角坐标系下的交错网格提出的, 近年来亦有诸多文献将其扩展到一般曲线坐标系下的同位网格实施<sup>[2]</sup>, 但如何针对天然河流、湖泊、水库及河口海岸等复杂边界大尺度流场计算来实施扩展后的 SIMPLE 算法, 文献中大多不祥, 这就降低了其在自编程模型构建中的应用广度。为此, 在前述基础之上, 本文对一般曲线坐标系下, 基于同位网格的 SIMPLE 算法实施过程进行详细推导。

### 3.1 速度求解变量的选择

连续性方程中逆变速度  $U, V$  为速度求解变量。动量方程中出于考虑源项处理的方便, 采用直角坐标速度分量  $u, v$  作为速度求解变量, 以逆变速度分量  $U, V$  作为界面流速, 这样可以使一般曲线坐标系

中守恒定律得到最好的满足。 $U$ 、 $V$  与  $u$ 、 $v$  的关系见 1.2 一般曲线坐标系下平面二维水流运动的通用控制方程(4)。

### 3.2 动量方程的离散形式

在 1.2 推导出的一般曲线坐标系下平面二维水流运动的通用控制方程(4)中,用  $S_\varphi$  代表源项。当  $\varphi$  分别为  $u$ 、 $v$  时,即求解  $\xi$ 、 $\eta$  方向动量方程时,需将水位梯度项从源项  $S_\varphi$  中分离出来<sup>[12-13]</sup>,才能采用 SIMPLE 算法进行水位~速度耦合求解。水位梯度项从物理平面变换到计算平面后,除产生相应的  $\partial z/\partial \xi$ 、 $\partial z/\partial \eta$  项外,还会引入交叉导数项,如:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial z \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z \partial y}{\partial \eta \partial \xi} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial z \partial x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial z \partial x}{\partial \eta \partial \xi} \right). \end{cases} \quad (7)$$

因而在计算平面上写出  $u$ 、 $v$  的离散方程时,亦应包含交叉导数项的离散形式。

相对于通用控制方程(4),将水位梯度项从方程源项中分离出来后  $\xi$  方向动量方程式中仅多  $-gh$   $\left( \frac{\partial z \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z \partial y}{\partial \eta \partial \xi} \right)$  1 项,对该项在如图 1 所示的控制体积中沿时间和空间进行积分,得:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left[ -gh \left( \frac{\partial z \partial y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z \partial y}{\partial \eta \partial \xi} \right) \right] d\xi d\eta dt = -gh y_\eta \frac{z_e - z_w}{(\delta \xi)_{ew}} (\delta \xi)_{ew} \Delta \eta \Delta t + gh y_\xi \frac{z_n - z_s}{(\delta \xi)_{sn}} (\delta \xi)_{sn} \Delta \xi \Delta t. \quad (8)$$

参照通用控制方程(4)基于同位网格的最终离散形式(5),并考虑式(8),可以求出  $\xi$  方向动量方程的离散形式为:

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} + d^u + (b^u z_\xi + c^u z_\eta)_p. \quad (9)$$

式中: $P$  为速度的计算地点,其余各项或系数的意义除与式(5)相同外,其他如下:

$$a_p^u = \sum a_{nb}^u + F_e - F_w + F_n - F_s + a_p^0 + \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^0} J \Delta \xi \Delta \eta,$$

$$d^u = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \Delta \xi \Delta \eta + a_p^0 \varphi_p^0,$$

$$b^u = -gh y_\eta (\delta \xi)_{ew} \Delta \eta, c^u = gh y_\xi (\delta \eta)_{sn} \Delta \xi,$$

$$z_\xi = \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{z_e - z_w}{(\delta \xi)_{ew}}, z_\eta = \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{z_n - z_s}{(\delta \eta)_{sn}}.$$

为推导之便,用主对角元素  $a_p^u$  除以式(9)两侧,则式(9)可以改写为如下形式:

$$u_p = \sum A_{nb}^u u_{nb} + D^u + (B^u z_\xi + C^u z_\eta)_p. \quad (10)$$

式中: $A_{nb}^u = \frac{a_{nb}^u}{a_p^u}$ ,  $B^u = \frac{b^u}{a_p^u} = -\frac{gh y_\eta}{a_p^u} (\delta \xi)_{ew} \Delta \eta$ ,  $C^u = \frac{c^u}{a_p^u} =$

$\frac{gh y_\xi}{a_p^u} (\delta \eta)_{sn} \Delta \xi$ ,  $D^u = \frac{d^u}{a_p^u}$ 。由于在一般曲线坐标系下计

算平面取  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ , 因此  $B^u = \frac{b^u}{a_p^u} = -\frac{gh y_\eta}{a_p^u}$ ,  $C^u =$

$$\frac{c^u}{a_p^u} = \frac{gh y_\xi}{a_p^u}.$$

同理,可以写出  $\eta$  方向动量方程的离散形式为:

$$a_p^v v_p = \sum a_{nb}^v v_{nb} + d^v + (b^v z_\xi + c^v z_\eta)_p. \quad (11)$$

式中:

$$a_p^v = \sum a_{nb}^v + F_e - F_w + F_n - F_s + a_p^0 + \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^0} J \Delta \xi \Delta \eta,$$

$$d^v = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\beta \Gamma_\varphi h}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \Delta \xi \Delta \eta + a_p^0 \varphi_p^0,$$

$b^v = gh x_\eta (\delta \xi)_{ew} \Delta \eta$ ,  $c^v = -gh x_\xi (\delta \eta)_{sn} \Delta \xi$ , 其余各项或系数的意义同式(9)。

同样,用主对角元素  $a_p^v$  除以式(11)两侧,则式(11)可以改写为如下形式:

$$v_p = \sum A_{nb}^v v_{nb} + D^v + (B^v z_\xi + C^v z_\eta)_p. \quad (12)$$

式中: $A_{nb}^v = \frac{a_{nb}^v}{a_p^v}$ ,  $B^v = \frac{b^v}{a_p^v} = \frac{gh x_\eta}{a_p^v}$ ,  $C^v = \frac{c^v}{a_p^v} = -\frac{gh x_\xi}{a_p^v}$ ,

$$D^v = \frac{d^v}{a_p^v}.$$

### 3.3 速度修正方程的推导

仿照平面直角坐标系下 SIMPLE 算法的基本思想,需先导出速度修正值的计算公式<sup>[2]</sup>。由于在一般曲线坐标系计算平面上逆变速度  $U$ 、 $V$  为连续性方程中的速度变量,则从满足连续方程的角度出发,应当导出关于逆变速度修正值  $U'$ 、 $V'$  的计算公式。但由于  $U$ 、 $V$  与  $u$ 、 $v$  相关联,而且在计算平面作为动量方程的求解变量是  $u$ 、 $v$ ,所以先导出直角坐标速度修正值  $u'$ 、 $v'$  的计算公式,然后再转换到  $U'$ 、 $V'$  的计算公式。

假设初始猜测水位为  $z^*$ , 初始假设速度为  $u^*$ 、 $v^*$ 。一般情况下,与初始假设速度  $u^*$ 、 $v^*$  相对应的  $U^*$ 、 $V^*$  不满足连续性方程,但初始假设速度  $u^*$ 、 $v^*$  满足动量离散方程(9)、(11),因此将初始猜测水位  $z^*$  和初始假设速度  $u^*$ 、 $v^*$  代入方程(9)、(11),得初始流速分布  $u^*$ 、 $v^*$ ,即:

$$a_{pu}^* u_p^* = \sum a_{nb}^* u_{nb}^* + d^u + (b^u z_\xi^* + c^u z_\eta^*)_p. \quad (13)$$

$$a_{pv}^* v_p^* = \sum a_{nb}^* v_{nb}^* + d^v + (b^v z_\xi^* + c^v z_\eta^*)_p. \quad (14)$$

在方程(13)、(14)中,等号右端的速度  $u_{nb}^*$ 、 $v_{nb}^*$  为初始假设值,等号左端的速度才是计算得到的初始流速分布,但由此计算得到的速度场并不能满足连续性方程,水位  $z^*$  也仅仅是一个假设分布。因此,需要对  $z^*$ 、 $u^*$ 、 $v^*$  进行修正。设水位修正值为

$z'$ , 速度修正值为  $u', v'$ , 则修正后的水位和速度计算公式为:

$$z = z^* + z', u = u^* + u', v = v^* + v'. \quad (15)$$

由此问题即转化为如何求出修正值  $z', u', v'$ 。由于  $z, u, v$  为正确值, 所以它们一定满足方程(9)、(11), 将其代入方程(9)、(11)后得到的  $u, v$  亦为正确值。因此, 将  $z, u, v$  代入方程(9)、(11)并减去方程(13)、(14)中的相应部分, 得:

$$a_p^u (u_p - u_p^*) = \sum a_{nb}^u (u_{nb} - u_{nb}^*) + \quad (16)$$

$$[b^u (z_\xi - z_\xi^*) + c^u (z_\eta - z_\eta^*)]_P。$$

$$a_p^v (v_p - v_p^*) = \sum a_{nb}^v (v_{nb} - v_{nb}^*) + \quad (17)$$

$$[b^v (z_\xi - z_\xi^*) + c^v (z_\eta - z_\eta^*)]_P。$$

考虑关系式(15), 上述方程改写为:

$$\begin{cases} a_p^u u'_p = \sum a_{nb}^u u'_{nb} + (b^u z'_\xi + c^u z'_\eta)_P, \\ a_p^v v'_p = \sum a_{nb}^v v'_{nb} + (b^v z'_\xi + c^v z'_\eta)_P. \end{cases} \quad (18)$$

参照方程(10)、(12)对方程(18)进行进一步改写, 可得:

$$\begin{cases} u'_p = \sum A_{nb}^u u'_{nb} + (B^u z'_\xi + C^u z'_\eta)_P, \\ v'_p = \sum A_{nb}^v v'_{nb} + (B^v z'_\xi + C^v z'_\eta)_P. \end{cases} \quad (19)$$

由方程(19)可见, 速度修正值  $u', v'$  由两部分构成。从物理意义上来讲, 前一部分为周围节点速度引起的修正量, 后一部分是同一方向相邻节点水位差引起的修正量。本文为简单起见, 略去第一一部分的影响(关于略去后对计算结果的影响可以参见文献[2]), 从而速度修正值为:

$$\begin{cases} u'_p = (B^u z'_\xi + C^u z'_\eta)_P, \\ v'_p = (B^v z'_\xi + C^v z'_\eta)_P. \end{cases} \quad (20)$$

将方程(20)代入逆变速度  $U, V$  与  $u, v$  之间的关系式, 整理得:

$$\begin{cases} U'_p = u'_p \frac{\partial y}{\partial \eta} - v'_p \frac{\partial x}{\partial \eta} = \\ (y_\eta B^u - x_\eta B^v) z'_\xi + (y_\eta C^u - x_\eta C^v) z'_\eta, \\ V'_p = -u'_p \frac{\partial y}{\partial \xi} + v'_p \frac{\partial x}{\partial \xi} = \\ (x_\xi C^v - y_\xi C^u) z'_\eta + (x_\xi B^v - y_\xi B^u) z'_\xi. \end{cases} \quad (21)$$

在方程(21)中略去交叉方向上的水位修正值导数项(对于 SIMPLE 算法, 当迭代过程收敛时, 速度修正值将趋于零, 因此略去该项不会影响最后的收敛性), 由此可以得到一般曲线坐标系下基于同位网格 SIMPLE 算法中逆变速度修正值的计算公式为:

$$\begin{cases} U'_p = (y_\eta B^u - x_\eta B^v) z'_\xi = B z'_\xi, \\ V'_p = (x_\xi C^v - y_\xi C^u) z'_\eta = C z'_\eta. \end{cases} \quad (22)$$

### 3.4 水位修正方程的推导

在导出速度修正值的计算公式后, 同样仿照平

面直角坐标系下 SIMPLE 算法的基本思想, 导出水位修正值的计算公式。

如 1.2 所述, 一般曲线坐标系下的连续性方程, 它是令通用控制方程(4)中的  $\varphi=1, \Gamma_\varphi=0, S_\varphi=0$  而得出, 具体形式如下:

$$J \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial \xi} + \frac{\partial(hV)}{\partial \eta} = 0. \quad (23)$$

由方程(23)可以看出, 连续性方程是对逆变速度分量写出的, 将它对如图 1 所示的控制体积  $P$  沿时间和空间作积分, 得:

$$J \frac{(h_p - h_p^0)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + (hU \Delta \eta)_e - \quad (24)$$

$$(hU \Delta \eta)_w + (hV \Delta \xi)_n - (hV \Delta \xi)_s = 0。$$

由于直角坐标速度分量  $u, v$  的修正值计算公式(20)和逆变速度  $U, V$  的修正值计算公式(22)都是对节点而言的, 为了导出水位修正方程, 并使流速与水位耦合, 将式(20)、(22)对界面写出, 即:

$$\begin{cases} U'_e = B_e (z'_\xi)_e, \\ U'_w = B_w (z'_\xi)_w, \\ V'_n = C_n (z'_\eta)_n, \\ V'_s = C_s (z'_\eta)_s. \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $B_e, B_w, C_n, C_s$  采用节点表达式(22)中  $B, C$  线性插值得, 而在  $(z'_\xi)_e, (z'_\xi)_w, (z'_\eta)_n, (z'_\eta)_s$  中则可引入相邻两点间的水位差, 即:

$$\begin{cases} (z'_\xi)_e = \frac{z'_E - z'_P}{\Delta \xi}, \\ (z'_\xi)_w = \frac{z'_P - z'_W}{\Delta \xi}, \\ (z'_\eta)_n = \frac{z'_N - z'_P}{\Delta \eta}, \\ (z'_\eta)_s = \frac{z'_P - z'_S}{\Delta \eta}. \end{cases} \quad (26)$$

于是修正后的逆变速度分量  $U, V$  在界面上的值可表示为:

$$\begin{cases} U_e = U_e^* + U'_e = U_e^* + B_e (z'_\xi)_e, \\ U_w = U_w^* + U'_w = U_w^* + B_w (z'_\xi)_w, \\ V_n = V_n^* + V'_n = V_n^* + C_n (z'_\eta)_n, \\ V_s = V_s^* + V'_s = V_s^* + C_s (z'_\eta)_s. \end{cases} \quad (27)$$

式中:  $U_e^*, U_w^*, V_n^*, V_s^*$  由节点处  $U^*, V^*$  线性插值得出。

将式(27)代入式(24)并整理, 可得:

$$\begin{aligned} & J \frac{(h_p - h_p^0)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + (hU^* \Delta \eta)_e - \\ & (hU^* \Delta \eta)_w + (hV^* \Delta \xi)_n - (hV^* \Delta \xi)_s + \\ & [hB (z'_\xi)_\Delta \eta]_e - [hB (z'_\xi)_\Delta \eta]_w + \\ & [hC (z'_\eta)_\Delta \xi]_n - [hC (z'_\eta)_\Delta \xi]_s = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(26)代入式(28)并整理,即可得水位修正方程为:

$$a_P z'_P = a_E z'_E + a_W z'_W + a_N z'_N + a_S z'_S + b. \quad (29a)$$

$$\text{简记为: } a_P z'_P = \sum a_{nb} z'_{nb} + b. \quad (29b)$$

式中:  $a_E = (hB)_e \left( \frac{\Delta \eta}{\delta \xi} \right)_e$ ,  $a_W = (hB)_w \left( \frac{\Delta \eta}{\delta \xi} \right)_w$ ,  $a_N = (hC)_n \left( \frac{\Delta \xi}{\delta \eta} \right)_n$ ,  $a_S = (hC)_s \left( \frac{\Delta \xi}{\delta \eta} \right)_s$ ,  $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$ ,  $b = (hU^* \Delta \eta)_e - (hU^* \Delta \eta)_w + (hV^* \Delta \xi)_n - (hV^* \Delta \xi)_s + J \frac{(h_P - h_P^0)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta$ .

方程(29)中,源项  $b$  表示由于速度场的不正确性引起的不平衡流量。通过多次迭代修正,最终  $b$  应趋于零,因此  $b$  可以作为判断迭代过程是否收敛的依据。

另外,为了加强速度与水位间的耦合关系,防止动量方程水位梯度项在离散时出现水位与速度间的失耦现象,即水位波动问题,源项  $b$  中的  $U_e^*$ 、 $U_w^*$ 、 $V_n^*$ 、 $V_s^*$  不能简单采用通常的线性插值公式进行计算,应借鉴交错网格成功的经验,将与所计算速度有关的相邻节点间的水位差引入到动量方程的求解过程中。因此,本研究依据文献[2]中 Rhis 与 Chow 的建议,采用以下改进的动量插值公式进行计算:

$$\begin{cases} U_e^* = \bar{U}_e^* + B_e \left( \frac{z_E - z_P}{\Delta \xi} - \bar{z}_\xi \right), \\ U_w^* = \bar{U}_w^* + B_w \left( \frac{z_P - z_W}{\Delta \xi} - \bar{z}_\xi \right), \\ V_n^* = \bar{V}_n^* + C_n \left( \frac{z_N - z_P}{\Delta \eta} - \bar{z}_\eta \right), \\ V_s^* = \bar{V}_s^* + C_s \left( \frac{z_P - z_S}{\Delta \eta} - \bar{z}_\eta \right). \end{cases} \quad (30)$$

式中:  $\bar{U}_e^*$ 、 $\bar{U}_w^*$ 、 $\bar{V}_n^*$ 、 $\bar{V}_s^*$  为按节点上的  $U$ 、 $V$  作线性插值得到的值;  $\bar{z}_\xi$ 、 $\bar{z}_\eta$  分别为与所研究控制体积有关的  $\xi$ 、 $\eta$  方向节点间水位梯度之平均值。当  $\xi$ 、 $\eta$  方向水位不是线性分布时,式(30)中括号内的项不为零,特别是当出现了锯齿形分布时,上述括号内的两项会有很大差别,这有助于检测不合理的水位场。

### 3.5 算法实施步骤

经过以上的推导,分别导出了一般曲线坐标系下,基于同位网格系统的速度修正方程和水位修正方程,至此解决了 SIMPLE 算法中的 2 个关键问题,依据上述两方程即可开始 SIMPLE 算法的计算,其计算步骤<sup>[2,14]</sup>可归纳如下。

(1)根据经验假设一个初始速度分布  $u^*$ 、 $v^*$ ,按照逆变速度分量  $U$ 、 $V$  与直角坐标速度分量  $u$ 、 $v$

之间的关系,计算节点上的  $U^*$ 、 $V^*$ ,进而依据线性插值求出界面流速  $U_e^*$ 、 $U_w^*$ 、 $V_n^*$ 、 $V_s^*$ ,用于计算首轮迭代时动量离散方程(9)、(11)中的系数和源项等。

(2)根据经验假设一个水位场的初始猜测值  $z^*$ 。

(3)将初始猜测水位  $z^*$  和初始假设速度  $u^*$ 、 $v^*$  代入动量离散方程(9)、(11),求得初始流速分布  $u^*$ 、 $v^*$ 。

(4)由  $u^*$ 、 $v^*$  计算节点上的  $U^*$ 、 $V^*$ ,并依据线性插值得出界面上的  $\bar{U}_e^*$ 、 $\bar{U}_w^*$ 、 $\bar{V}_n^*$ 、 $\bar{V}_s^*$ 。

(5)计算由式(30)规定的界面流速的附加项(括号内的项),从而得出  $U_e^*$ 、 $U_w^*$ 、 $V_n^*$ 、 $V_s^*$ 。

(6)计算水位校对方程(29)中的系数及源项  $b$ 。

(7)求解水位校对方程(29),得出计算平面的水位修正值  $z'$ 。

(8)将求得的水位修正值  $z'$  代入速度修正方程(20)、(22),计算得出  $u'$ 、 $v'$  及  $U'$ 、 $V'$ 。

(9)依据步骤(8)求出的修正值,更新水位和流速,即  $z = z^* + z'$ ,  $u = u^* + u'$ ,  $v = v^* + v'$ ,  $U = U^* + U'$ ,  $V = V^* + V'$ ,同时按式(27)直接更新界面流速  $U_e$ 、 $U_w$ 、 $V_n$ 、 $V_s$ 。

(10)用步骤(9)求得的界面流速  $U_e$ 、 $U_w$ 、 $V_n$ 、 $V_s$  计算动量离散方程(9)、(11)中的系数和源项,并将经过(8)更新的水位  $z$  和速度  $u$ 、 $v$  代入动量离散方程(9)、(11),求得新的迭代层次的流速分布  $u^*$ 、 $v^*$ 。

(11)转至步骤(4)开始新迭代层次的计算。

(12)重复步骤(4)~(11),直至收敛。

## 4 计算实例

### 4.1 算例概况

博斯腾湖<sup>[15]</sup>(以下简称博湖)位于新疆维吾尔自治区巴音郭楞蒙古自治州境内,是我国第一大内陆淡水湖,它由大湖、小湖群、湖滨湿地 3 部分组成。博湖习惯上被称为大湖,其水域辽阔、湖岸边界复杂,东西长约 55 km,南北平均宽约 20 km,在高水位时水面面积约 1 002.4 km<sup>2</sup>,容积 88 亿 m<sup>3</sup>,平均水深 7.8 m,最深为 17 m。上游流入博湖的河流主要有开都河、黄水沟及清水河等,其中常年性河流只有开都河;下游流出的河流主要为孔雀河,博湖为该河的发源地。博湖流域水系分布见图 2<sup>[16]</sup>。

博湖的主要功能是对上游开都河来水进行调控,满足下游孔雀河流域的农田灌溉、工业及城乡生活用水、流域生态环境保护用水需求等,并担负向塔

里木河中下游紧急调水的任务。但严重的水环境问题一直困扰着博湖,如:农田灌溉排水入湖,导致盐污染加剧;湖水位下降、水域面积缩小,使生态环境恶化;湖泊富营养化,有机污染加剧等。因此,研究不同湖水吞吐量、湖水位、风向及风力等条件下,整个湖域的流场、水质变化,成为博湖亟待解决的问题。

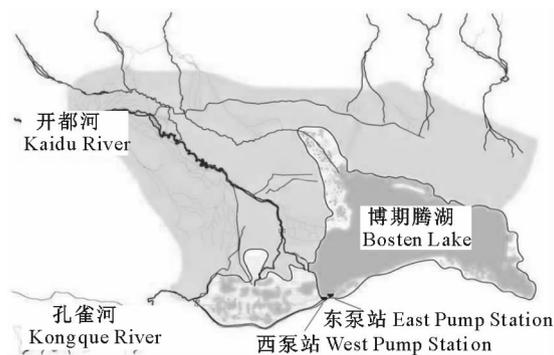


图 2 博斯腾湖流域水系分布示意图

Fig. 2 Distribution of river system in Bosten Lake basin

本研究即以此为背景,选择枯水年典型工况为示例,运用文中推导得到的一般曲线坐标系下基于同位网格的复杂边界大尺度流场模拟算法,对该工况下博湖流场进行计算,以期检验本研究成果在实际计算中的应用效果。

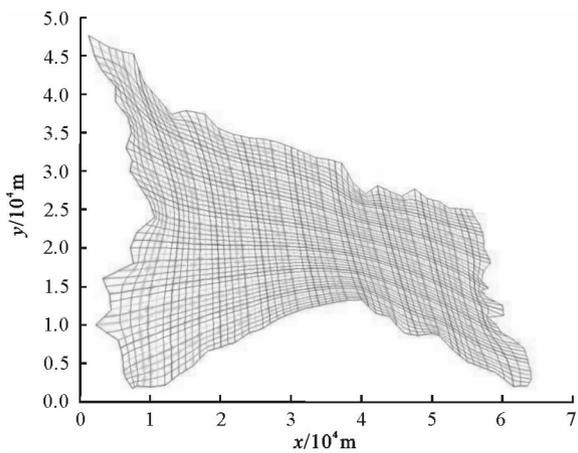


图 3 一般曲线坐标系下曲线网格生成图

Fig. 3 Curvilinear grid in the general curvilinear coordinates

同时,本文采用同位网格布置计算变量,与文献[15]中相应工况下采用交错网格布置计算变量得到的流场分布成果相比,两者在计算精度、收敛速度等方面基本相当,其中流速值基本一致,两者最大误差不超过 1%,对于收敛时间而言,本研究采用的同位网格效果虽不甚明显,但仍略有缩短。在本算例中同位网格的优势主要表现在,计算程序编制工作量

#### 4.2 计算成果及分析

本次博湖流场计算选用枯水年典型工况,按照恒定流模型进行计算。其计算条件为:湖水位 1 045.00 m;开都河入湖流量 64.98 m<sup>3</sup>/s,东、西泵站出湖流量均为 10 m<sup>3</sup>/s;风向 NW,风速 3.5 m/s。计算收敛精度取为 10<sup>-5</sup>。

与文献[15]中类似,将整个湖域划分为 59×49 个曲线网格,即长边布置 59 个网格节点,宽边布置 49 个网格节点,共计 2 891 个计算节点,一般曲线坐标系下曲线网格生成图见图 3。由图 3 可以看出,生成的计算网格基本无须考虑网格是否严格正交,网格适应性良好。

依据本文推导方法及计算条件,博湖枯水年典型工况下流场计算成果见图 4。由图 4 可以看出,影响博湖流场分布的因素主要有 2 个,一是开都河等外部来流和东、西泵站出流吞吐所产生的驱动作用,另一个是湖面上风的驱动力。其中由于湖面尺度较大,湖泊吞吐驱动的能量影响非常有限,引起的环流较弱,仅在西南部形成一个小的顺时针环流,而风向、风速的影响较明显,除在东部形成一个较大的逆时针环流外,还由西北部向东南部形成一股环流,且延伸距离较长,但在湖中心不甚明显。

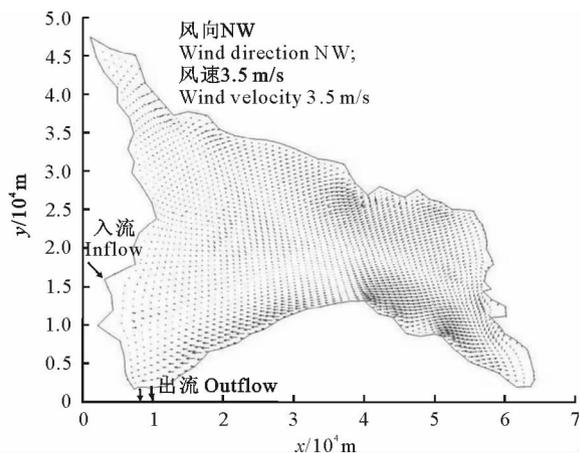


图 4 博斯腾湖枯水年典型工况下流场分布图

Fig. 4 Flow field distribution of Bosten Lake in the low flow typical condition

大幅减少,计算程序简洁、易读,适应性较强。

综合上述分析,本算例中整个湖域流场计算成果合理可靠,与实际情况基本相符,表明本研究推导得出的一般曲线坐标系下,基于同位网格的复杂边界大尺度流场模拟算法是可以用于实际流场模拟计算的。

## 5 结 语

本研究以沿水深平均的平面二维水流运动数学模型为基本讨论模型,在复杂边界大尺度流场模拟中引入了同位网格,给出了一般曲线坐标系下平面二维水流运动控制方程的通用转换形式,以及基于同位网格的通用离散方程,重点研究了一般曲线坐标系下基于同位网格 SIMPLE 算法的实施办法,其中包括速度求解变量的选择、计算平面动量方程的离散形式、速度修正方程和水位修正方程的推导等,最终给出了算法的详细计算步骤和新疆博斯腾湖流场模拟的应用实例,从而为解决天然河流、湖泊、水库及河口海岸等具有复杂不规则边界的大尺度流场模拟问题,提供了一个适应性更强、效率更高的途径。

### [参考文献]

- [1] 李义天,赵明登,曹志芳.河道平面二维水沙数学模型 [M].北京:中国水利水电出版社,2001:10-40.  
Li Y T, Zhao M D, Cao Z F. Depth-averaged two-dimensional flow-sediment mathematical model in the river channel [M]. Beijing: China WaterPower Press, 2001: 10-40. (in Chinese)
- [2] 陶文铨.计算传热学的近代进展 [M].北京:科学出版社,2005:159-232.  
Tao W Q. The modern progress of numerical heat transfer [M]. Beijing: Science Press, 2005: 159-232. (in Chinese)
- [3] Ye J, McCorquodale J A. Depth-average hydrodynamic model in curvilinear collocated grid [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1997, 123(5): 380-388.
- [4] Ye J, McCorquodale J A. Simulation of curved open channel flows by 3D hydrodynamic model [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1998, 124(7): 687-698.
- [5] Scott F B. Godunov-based model for nonhydrostatic wave dynamics [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE, 2005, 131(5): 226-238.
- [6] Khosronejad I, Rennie C D, Salehi Neyshabouri S A A, et al. 3D numerical modeling of flow and sediment transport in laboratory channel bends [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 2007, 133(10): 1123-1134.
- [7] Bishnu H Devkota, Jörg Imberger. Lagrangian modeling of weakly nonlinear nonhydrostatic shallow water waves in open channels [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 2009, 135(11): 926-934.
- [8] Lien H C, Hsieh T Y, Yang J C, et al. Bend-flow simulation using 2D depth-averaged model [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1999, 125(10): 1097-1108.
- [9] Cheong F, Xue H. Turbulence model for water flow over two-dimensional bed forms [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1997, 123(5): 402-409.
- [10] Zhou J G. Velocity-depth coupling in shallow-water flows [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1995, 121(10): 717-724.
- [11] Patankar S V. 传热与流体流动的数值计算 [M]. 张政,译.北京:科学出版社,1989:91-129.  
Patankar S V. Numerical heat transfer and fluid flow [M]. Zhang Z, translation. Beijing: Science Press, 1989: 91-129. (in Chinese)
- [12] 谢作涛,张小峰,袁晶,等.一般曲线坐标系平面二维水沙数学模型研究及应用 [J].泥沙研究,2005(6):58-64.  
Xie Z T, Zhang X F, Yuan J, et al. Study and application of 2-D horizontal mathematical model for flow and sediment in generalized curvilinear coordinate [J]. Journal of Sediment Research, 2005(6): 58-64. (in Chinese)
- [13] 李人宪.有限体积法基础 [M].北京:国防工业出版社,2005.  
Li R X. Finite volume method foundation [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005. (in Chinese)
- [14] 王福军.计算流体动力学分析:CFD软件原理与应用 [M].北京:清华大学出版社,2004.  
Wang F J. The analysis of computational fluid dynamics: CFD software theory and application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [15] 冯民权.大型湖泊水库平面及垂向二维流场与水质数值模拟 [D].西安:西安理工大学,2003.  
Feng M Q. 2-Dimensional plane and vertical flow field and water quality numerical simulation of large lake and reservoir [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2003. (in Chinese)
- [16] 钟瑞森.干旱绿洲区分布式三维水盐运移模型研究与应用实践 [D].乌鲁木齐:新疆农业大学,2008.  
Zhong R S. Research and practical application on distributed 3D water-salt transport model in arid oasis area [D]. Urumqi: Xinjiang Agricultural University, 2008. (in Chinese)