

普通城门洞形断面临界水深的近似算法

张宽地^{1,2}, 吕宏兴¹, 张新燕¹

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

2 中国科学院 水利部 水土保持研究所, 黄土高原土壤侵蚀与旱地农业国家重点实验室, 陕西 杨凌 712100)

【摘要】 **【目的】**建立普通城门洞形断面临界水深的简捷计算方法。**【方法】**针对目前普通城门洞形过水断面临界水深计算过程繁琐、误差较大,且依赖图表、不便应用的现状,应用数学变换及逐步优化拟合原理,提出普通城门洞断面临界水深的计算公式,并采用实例对公式进行验证。**【结果】**得到了城门洞形断面临界水深的近似计算式,实例计算及误差分析结果表明,在工程实用范围内(临界水深与拱顶半径之比为 1.13~1.85),所建立的公式最大相对误差仅为 0.33%。**【结论】**所建立的公式物理概念清晰明确、形式简捷,为工程设计及水工设计手册的编制提供了有益参考。

【关键词】 普通城门洞形断面;临界水深;水力计算

【中图分类号】 TV131

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2009)011-0231-04

Approximate method of calculating critical water depth to arched section tunnel

ZHANG Kuan-di^{1,2}, LÜ Hong-xing¹, ZHANG Xin-yan¹

(1 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 State Key Laboratory of Soil Erosion and Dryland Farming on Loess Plateau, Institute of
Soil and Water Conservation, CAS, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: **【Objective】** It is difficult to calculate critical depth of arched section tunnel for its complex geometrical shape. The aim was to find a direct calculating formula for critical water depth to arched section tunnel. **【Method】** Using a mathematics transformation method and the theory of optimization and regression to deal with the basis equation of the critical depth in arched section tunnel, a new brief and exact direct formula was derived in this study. **【Result】** This method was simpler and more accurate than other approximate methods with a maximum error of less than 0.33% in the utility range (ratio of critical depth to arch radius of 1.13—1.85). **【Conclusion】** So, it will be useful in engineering practice and in course of compiling handbook of hydraulic structure design

Key words: arched section tunnel; critical depth; hydraulic calculation

临界流是水力学上一个很重要的概念,处于临界状态的水流是不稳定的,水面往往呈波状形态,在稍许扰动的情况下,会出现明满流的交替以及无压隧洞的封顶等不利现象。因此,水力计算中临界

水深的计算是工程设计中的关键水力要素,应用十分频繁且对精度要求较高。对于几何形状较为简单的渠道,如矩形、梯形、圆形、马蹄形断面临界水深的计算问题,国内外学者已进行了大量研究,也提出

* [收稿日期] 2008-12-26

[基金项目] 国家“973”计划项目(2007CB407201);国家自然科学基金重点项目(40335050);西北农林科技大学创新团队建设计划(01140202)

[作者简介] 张宽地(1978—),男,宁夏隆德人,讲师,博士,主要从事水工水力学及坡面水流研究。

E-mail: zhangkuandi428@126.com

[通信作者] 吕宏兴(1955—),男,陕西陇县人,教授,博士生导师,主要从事水力学及河流动力学研究。

了不少简捷的计算公式^[1-7],但对于普通城门洞形断面临界水深的计算问题,因涉及超越方程的求解,研究成果相对较少。现行的有关普通城门洞形断面明渠临界水深计算方法有图解法、试算法^[8]。张生贤等^[9]提出的明渠临界流 β 代换简捷算法,采用数表法求不同断面的临界水深;马吉明等^[10]在 2000 年提出了查图法;王正中等^[11]在 2004 年提出了一种近似计算公式。但文献[8-10]提出的算法均依赖于图表,不易推广;而文献[11]的直接算法虽然公式简捷,计算误差小,但使用范围受到限制。为此,本研究在总结现有成果的基础上,通过数学推导及逐步优化拟合,提出了城门洞形断面临界水深计算的新近似公式,现将结果报道如下,以期工程设计提供参考。

1 明渠临界水深的基本方程

明渠水流存在 3 种流态,即缓流、急流和临界流。临界流是指对应明渠水流断面比能最小的流动状态,其既可以产生于某一渠段内,也可产生于某一过水断面上,相应的水深称为临界水深,以 h_k 表示。临界流满足的条件^[12]为:

$$\frac{aQ^2}{g} = \frac{A_k^3}{B_k} \tag{1}$$

式中: a 为流速分布不均匀系数,通常取 1.0; Q 为流量(m^3/s); g 为重力加速度; A_k 为临界流对应的过水断面面积(m^2); B_k 为水面宽度(m)。

1.1 普通城门洞形断面的水力要素

城门洞形断面的形式见图 1,对于水深小于 H_0 的情况,由于其属于矩形断面临界水深的求解问题,已有解析解,故不再赘述;水深大于 H_0 的情况为本

研究的内容。

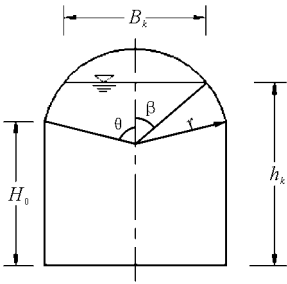


图 1 城门洞形隧洞断面

Fig. 1 Arch water transfer cross section

侧墙高度 H_0 等于顶拱半径 r 、 $\theta = \pi/2$ 时的断面,工程中称为普通城门洞形断面,其水力要素^[13]为:

$$\begin{cases} A_k = (2 + \pi/2)r^2 - r^2\beta + r^2\sin\beta\cos\beta, \\ B_k = 2r\sin\beta, \\ h_k = r(1 + \cos\beta). \end{cases} \tag{2}$$

1.2 普通城门洞形断面的临界流方程

对普通城门洞形断面,可将式(2)对应的水力要素代入式(1),整理后可得普通城门洞形断面临界水深的非线性方程组为:

$$\begin{cases} \frac{aQ^2}{g} = \frac{[(2 + \pi/2)r^2 - r^2\beta + r^2\sin\beta\cos\beta]^3}{2r\sin\beta}, \\ h_k = r(1 + \cos\beta). \end{cases} \tag{3}$$

由此可知,普通城门洞断面临界水深 h_k 的计算,即为非线性方程组的求根问题。

2 普通城门洞形断面临界水深的近似计算

对式(3)临界流方程组进行恒等变形,可得临界水深的精确计算公式为:

$$\frac{aQ^2}{gr^5} = \frac{[(2 + \pi/2) - \arccos(h_k/r - 1) + (h_k/r - 1)\sqrt{1 - (h_k/r - 1)^2}]^3}{2[1 - (h_k/r - 1)^2]^{0.5}} \tag{4}$$

式(4)为超越函数,且未知数包含在三角函数中,无法直接求解,为得到近似计算公式,不妨引入无量纲参数:

$$\begin{cases} k = \frac{aQ^2}{gr^5}, \\ x = h_k/r - 1. \end{cases} \tag{5}$$

理论上, x 的取值范围为 $[0, 1]$,相应的无量纲参数 k 的取值范围为 $[4, \infty]$,即水深无限接近洞顶时,临界流所要求的流量无限大(k 值趋于无穷大),即当水深无限接近洞顶时,在这种隧洞中保持临界流是不可能的。但这决不意味着隧洞内水位较高时不会产生临界流;相反,在水位较高情况下,洞内完

全有可能出现临界流,而其波状水面有可能接触洞顶引起水流封顶现象或明满流交替现象^[13],为避免隧洞输水过程中产生明满流交替的水流现象,自由水面以上的净空面积要不小于全断面面积的 15%,净空高度不小于 0.4 m^[12]。

$$\frac{[\arccos(x) - x\sqrt{1 - x^2}]r^2}{[2 + \pi/2]r^2} \geq 15\% \tag{6}$$

用试算法求解式(6),可得 $x < 0.70$,由此可知,相对临界水深 x 的最大值不会超过 0.85,将 $x = 0.85$ 代入式(4)得 k 的最大值为:

$$k=\frac{aQ^2}{gr^5}=\frac{[(2+\pi/2)-\arccos(0.85)+0.85\sqrt{1-0.85^2}]^3}{2[1-0.85^2]^{0.5}}=39.44。$$

(7)

根据临界水深的连续性可知, x 的最小值为 0, 但当 $x\leq 0.13$ 时, 按等底宽矩形断面临界水深的公式计算所得的结果最大误差不超过 0.15%。因此, 无量纲参数 x 的取值范围应为 $[0.13, 0.85]$, 相应无量纲参数 k 的取值范围为 $[5.82, 39.44]$ 。

在 x 的取值范围内, 以一定步长给定一组数值, 代入临界流方程组中可得相应无量纲参数 k 的取值, 本研究对该范围内 k 与 x 的 180 多组数据采用 Matlab 7.1 软件进行逐步优化拟合, 可得:

$$x=0.434\sqrt{k}-k/35-0.75, 0.13\leq x\leq 0.85。(8)$$

表 1 公式(8)的误差分析

Table 1 Error estimation of formula 8

x^*	k	β	x		$\Delta/\%$	
			文献[11]公式 Reference [11]	本文公式(8) Formula 8 in this paper	文献[11]公式 Reference [11]	本文公式(8) Formula 8 in this paper
0.852 6	39.862 8	0.549 8	0.859 9	0.851 2	0.853 4	-0.167 9
0.803 9	33.386 7	0.637 0	0.806 4	0.803 8	0.320 3	-0.007 1
0.754 7	28.661 4	0.715 6	0.754 2	0.754 6	-0.067 2	-0.017 2
0.700 9	24.660 3	0.794 1	0.698 7	0.700 6	-0.312 7	-0.040 4
0.649 4	21.560 7	0.863 9	0.646 8	0.649 2	-0.412 9	-0.039 3
0.601 8	19.131 9	0.925 0	0.599 3	0.601 7	-0.423 4	-0.020 6
0.551 9	16.927 8	0.986 1	0.549 8	0.552 0	-0.378 7	0.006 4
0.500 0	14.921 9	1.047 2	0.498 5	0.500 2	-0.296 7	0.030 6
0.454 0	13.345 8	1.099 6	0.453 0	0.454 2	-0.210 5	0.040 5
0.406 7	11.892 3	1.151 9	0.406 2	0.406 9	-0.121 2	0.034 6
0.358 4	10.554 4	1.204 3	0.358 2	0.358 4	-0.038 7	0.010 5
0.300 7	9.132 1	1.265 4	0.300 8	0.300 6	0.038 0	-0.034 8
0.250 4	8.025 9	1.317 7	0.250 6	0.250 2	0.081 5	-0.068 2
0.199 4	7.019 1	1.370 1	0.199 6	0.199 3	0.106 8	-0.045 8
0.156 4	6.252 9	1.413 7	0.156 6	0.156 6	0.127 2	0.105 2
0.130 5	5.823 8	1.439 9	0.130 7	0.131 0	0.153 6	0.331 6
平均相对误差/% Average relation error					0.262 8	0.066 7

由表 1 可知, 式(8)的精度完全满足工程的需求, 在工程实用范围内(临界水深与拱顶半径之比为 1.13~1.85), 其最大误差的绝对值为 0.331 6%, 小于文献[11]最大误差绝对值 0.853 4%, 且平均误差仅为 0.066 7%; 从公式的形式来看, 式(8)较文献[11]的公式更加简捷。

4 应用举例

某水库泄洪隧洞设计泄流量 2 150 m³/s, 拟用普通城门洞形断面, 初设半径为 7.5 m, 试计算洞内的临界水深值。

计算步骤:

1) 计算无量纲参数 k :

3 精度评价

为验证式(8)的正确性及误差的全程分布情况, 通过给定不同的 x 值, 由水力要素函数求得相应 x 的不同过流流量 Q , 再由临界流方程求得相应无量纲参数 k 值, 最后将 k 值代入式(8), 求得相应的 x 的近似计算值。设精确解为 x^* , 则相对误差 $\Delta=(x-x^*)/x^*\times 100\%$ 。表 1 列出了公式(8)在相对临界水深 x 取值范围误差的全程分布情况, 并列出了文献[11]的计算结果, 以便于比较。

$$k=\frac{aQ^2}{gr^5}=\frac{2\ 150^2}{9.8\times 7.5^5}=19.857。$$

2) 将无量纲参数 k 代入式(6), 计算无量纲水深 x , 有:

$$x=0.434\sqrt{k}-k/35-0.75=0.617。$$

3) 将无量纲水深代入式(5)计算临界水深 h_k :

$$h_k=(x+1)r=1.617\times 7.5=12.127\text{ m}。$$

精确解为 12.126 m, 计算误差为 0.03%。

5 结 论

本研究利用逐步逼近原理, 在分析临界流方程数学特性的基础上, 提出了普通城门洞形断面临界水深的近似计算公式, 该公式具有表达式简捷、准确、适用范围广等特点, 克服了查图、查表法繁琐、误

差大等缺点,对水工设计及水工计算手册的编制有一定的参考价值。

〔参考文献〕

- [1] Prabhata K S, Wu S, Katopodis C. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J]. Hydr Engrg, 1999, 125(7):785-786.
- [2] Wang Z Z. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J]. Hydr Eng ASCE, 1998, 124(1):90-92.
- [3] Swamee P K, Rathie P N. Exact equations for critical depth in trapezoidal canal [J]. Irrig Drain Eng, 2005, 131(5):474-476.
- [4] Kanani A, Bakhtiari M, Borghei S M, et al. Evolutionary algorithms for the determination of critical depths in conduits [J]. Irrig and Drain Engrg, ASCE, 2008, 134(6):847-852.
- [5] Knight D W, Handed M E. Boundary shear in symmetrical compound channels [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1984, 110(10):1412-1430.
- [6] 张宽地, 吕宏兴, 赵延凤. 明流条件下圆形断面正常水深与临界水深直接计算法 [J]. 农业工程学报, 2009, 25(3):1-5.
Zhang K D, Lü H X, Zhao Y F. Direct calculation for normal depth and critical depth of circular section tunnel under free flow [J]. Transactions of the CSAE, 2009, 25(3):1-5. (in Chinese)
- [7] 张宽地, 吕宏兴, 陈俊英. 马蹄形过水断面临界水深的直接计算法 [J]. 农业工程学报, 2009, 25(4):15-18.
Zhang K D, Lü H X, Chen J Y. Direct calculation of critical depth of horse shoe section tunnel [J]. Transactions of the CSAE, 2009, 25(4):15-18. (in Chinese)
- [8] 华东水利学院. 水工设计手册 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1986.
East China Water Conservancy Institute. Handbook of hydraulic structure design [M]. Beijing: China Waterpower Press, 1986. (in Chinese)
- [9] 张生贤, 张步南. 明渠均匀流临界流 β 代换简捷计算法 [C]//中国科学技术协会首届青年学术年会论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1992.
Zhang S X, Zhang B N. The simple β displacement computation method of open channels uniform flow and critical flow [C]//The first youth learning annual corpus of china association for science and technology. Beijing: China Science Technology Press, 1992. (in Chinese)
- [10] 马吉明, 梁海波, 梁元博, 等. 城门洞形及马蹄形过水隧洞的临界水流 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1999, 39(11):32-34.
Ma J M, Liang H B, Liang Y B, et al. Critical flow in city-gate and horseshoe conduit [J]. Tsinghua University: Sci and Tech, 1999, 39(11):32-34. (in Chinese)
- [11] 王正中, 陈涛, 张新民, 等. 城门洞形断面隧洞临界水深度的近似算法 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(6):814-816.
Wang Z Z, Chen T, Zhang X M, et al. Approximate solution for the critical depth of a arched tunnel [J]. Tsinghua University: Sci and Tech, 2004, 44(6):814-816. (in Chinese).
- [12] 清华大学水力学教研组. 水力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1980.
Hydraulics Teaching and Research Group in Tsinghua University. Hydraulics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1980. (in Chinese).
- [13] 马吉明, 谢省宗, 梁元博. 城门洞形及马蹄形输入隧洞内的水跃 [J]. 水利学报, 2000(7):20-24.
Ma J M, Xie S Z, Liang Y B. Hydraulic jumps in rectangular conduit with circular upper wall and horseshoe tunnel [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000(7):20-24. (in Chinese)