梯形明渠临界水深的模式搜索算法求解

张宽地, 吕宏兴, 赵延风, 杨 艳

(西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

【摘要】【目的】基于模式搜索算法求解梯形明渠的临界水深。【方法】针对梯形明渠临界水深计算无显函数形式的表达式, 及传统计算中的试算法或查图法计算过程繁琐复杂且计算精度不高的现状, 引入一个无量纲参数——单位水面宽度, 对梯形明渠临界流水深的基本方程进行恒等变形, 得到了求解单位水面宽度的超越函数, 并证明该方程为单调函数。【结果】将求解临界流水深的问题等价于一非线性优化问题, 并用确定性优化方法——模式搜索算法进行求解。【结论】实例计算及误差分析表明, 该算法具有收敛速度快和求解精度高的特点, 为梯形断面的水力计算提供了一种新思路。

【关键词】 梯形明渠; 临界水深; 单位水面宽度; 模式搜索算法

【中图分类号】 TV133.4

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2009)10-0225-04

Application of pattern search optimization in calculation of critical depth in trapezoidal canal

ZHANG Kuan-di, LÜ Hong-xing, ZHAO Yan-feng, YANG Yan

(College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: 【Objective】 The study was to solve the trapezoidal open canal critical depth of water based on the pattern search algorithm. 【Method】 Critical depth is an important parameter occurring in the design of irrigation canals. Direct analytic solution of critical-depth problems is not possible, as the governing equations for the practical canal sections are implicit. The traditional solving methods like trial method and chart method are very complicated with low precision. In order to improve this situation, a new formula is derived from transforming identically the critical flow equation in trapezoidal canal through introducing a non-dimensional parameter—unit surface width. Also, it is proved to be monotonic function. 【Result】 So, calculation of critical depth problem is converted into a nonlinear constrained optimization problem, which can be solved by the pattern search optimization method. 【Conclusion】 Error analysis and an illustration computed using this method show that the new algorithm is capable of improving the convergence performance significantly in convergence ability and solution precision. So it provides a new tool for obtaining normal depth of open canal in trapezoid section problem.

Key words: open trapezoidal canal; critical depth; unit surface width; pattern search algorithm

临界水深是明渠流态判别的重要标志, 也是明渠水力学中的基本水力要素, 在泄水建筑物水面曲线、溢流坝下游收缩断面水深等的推求及水力设计

与计算中应用广泛^[1-2]。由于梯形断面临界水深的求解无显函数形式的表达式, 因而多年来国内外学者进行了大量研究, 提出了多种计算方法, 如 Wang

* [收稿日期] 2009-01-06

[基金项目] 国家 973 计划项目(2007CB407201); 国家自然科学基金重点项目(40335050)

[作者简介] 张宽地(1978—), 男, 宁夏隆德人, 讲师, 在职博士, 主要从事水工水力学及坡面水流研究。

E-mail: zhangkuandi428@126.com

[通信作者] 吕宏兴(1955—), 男, 陕西陇县人, 教授, 博士生导师, 主要从事水力学与河流动力学研究。

[3] 采用牛顿迭代法给出了梯形断面临界水深的直接计算公式, Kurbanov 等[4] 给出了复式梯形断面临界水深的计算方法, Swamee 等[5] 基于快速无穷收敛级数给出了求解梯形断面临界水深的近似计算方法, 王兴全[6]、王正中[7-8] 提出了不同的迭代计算式, 赵延凤等[9] 也提出了一种新的直接算法。上述计算方法中, 文献[3]和[6-9]均采用最优迭代形式, 配合以恰当的迭代初值, 给出了不同的直接计算方法。该类计算方法理论性强, 计算误差小, 但迭代计算的优劣与迭代格式及初值的选取密切相关。而文献[4]和[5]都是基于近似替代函数而给出的计算方法, 该类方法均属于经验公式, 计算过程相对复杂, 不便于工程界直接采用。随着计算机技术的不断普及, 探求一种适用范围广、精度高、便于程序化的计算方法, 是工程设计中急待解决的问题。

明渠临界水深的计算, 从数学上可表示为求解一个非线性高次方程的根, 可证明当其他物理量已知时, 该方程在区域 $(0, +\infty)$ 存在惟一正实根。因此, 可以将超越函数求根的问题转化为非线性优化问题, 并运用优化算法进行求解。近年来, 随着人工智能算法理论不断完善, 许多学者将新型的优化算法运用到梯形断面临界水深的计算中, 如 Kanani 等[10]采用遗传算法求解梯形断面的临界水深, 陈应华等[11]将粒子群优化算法应用到临界水深的求解中。上述方法避免了传统方法存在的缺点, 适当提高了求解精度, 但仍存在稳定性、收敛性、通用性及算法实现的简捷性等不够理想的问题。为此, 本研究通过引入无量纲参数“单位水面宽度”, 对临界水深基本方程进行了恒等变形, 得到了求解“单位水面宽度”的超越函数, 并采用确定性优化方法——模式搜索算法进行了求解, 以期为梯形明渠临界水深的程序化计算提出一种新思路, 以供设计人员参考。

1 无量纲参数“单位水面宽度”的概念及含义

由于无量纲参数既无量纲又无单位, 更能够反映客观规律, 在研究水流运动时, 由无量纲参数所组成的物理方程更具有普遍意义。本研究引入无量纲参数——梯形断面“单位水面宽度”, 其定义为相应于临界水深时水面宽度与渠道底宽的比值, 用 x 表示, 取值范围为 $1 < x < +\infty$ 。其真正的物理含义是: x 是描述梯形断面过流断面“相对形状”的一个系数, 当 x 趋近于 1 时, 梯形过水断面趋向于矩形断

面; 当 x 趋向于 $+\infty$ 时, 梯形过水面趋向于三角形断面。由定义可知, “单位水面宽度”能真实表征过水断面的相对形状特征, 当梯形断面的底宽和边坡确定后, 梯形过水断面的大小仅随流量的大小而发生变化, 即当流量增大时 x 随之增大, 当流量减小时 x 随之减小。当梯形渠道断面和流量都确定时, 梯形过水断面的“相对形状”就随之确定, 因而水深也随之确定, 故引入梯形断面“单位水面宽度”这一参数, 能够更好地反映这些物理量之间的变化规律。

2 临界水深的计算公式

临界水深的基本计算公式[7]为:

$$\frac{\alpha Q_k^2}{g} = \frac{A_k^3}{B_k} \quad (1)$$

式中: α 为动能修正系数; Q_k 为流量, m^3/s ; g 为重力加速度, m/s^2 ; A_k 为相应于临界水深时的过水断面面积, m^2 ; B_k 为相应于临界水深时的水面宽度, m 。

$$\text{设 } x = \frac{B}{b} = \frac{b + 2mh_k}{b} = 1 + \frac{2m}{b}h_k \quad (2)$$

式中: x 为单位水面宽度; B 为梯形渠道底宽; m 为梯形断面的边坡系数, 非等腰梯形断面时 $m = (m_1 + m_2)/2$, 其中 m_1, m_2 为非等腰梯形断面两腰的边坡系数; h_k 为相应过水流量为 Q_k 时的临界水深, m 。

$$\text{则 } h_k = \frac{b}{2m}(x - 1) \quad (3)$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{[(b + mh_k)h_k]^3}{b + 2mh_k} \quad (4)$$

将式(3)代入式(4), 并整理得:

$$\frac{(x^2 - 1)^3}{x} = \frac{64\alpha m^3 Q^2}{gb^5} \quad (5)$$

由此可知, 式(5)是单位水面宽度 x 的超越函数。工程中此类问题的求解, 一直采用查图表或试算法等低效、低精度的计算方法, 不仅计算过程繁琐复杂, 而且计算精度不高。

3 梯形明渠临界水深的模式搜索算法

由以上分析可知, 梯形明渠临界水深的求解就是非线性方程的求根问题, 其传统解法主要有试算法、简单迭代法、牛顿迭代法等。试算法计算繁琐、误差大。迭代法的收敛性在很大程度上依赖于初始点的选择, 不合适的初始点很容易导致算法收敛失败, 且在牛顿迭代法的计算过程中, 每一步都要计算函数的导数, 对于公式(5)这样的非线性方程来说, 函数导数的计算非常繁琐。模式搜索算法是一种不

需要函数的任何导数信息,直接搜索当前点周围的一系列点,进而寻找最优解的一种优化算法,为复杂函数的寻优问题提供了一种很好的途径。

不失一般性,将式(5)的非线性方程转化为只含上下限的非线性约束优化问题,即

$$\min_{x \in [1, +\infty]} f(x) = \left| \frac{(x^2 - 1)^3}{x} - \frac{64am^3 Q^2}{gb^5} \right| \quad (6)$$

式中:| | 为取绝对值, $f(x)$ 为目标函数, x 为优化变量即“单位水面宽度”。

3.1 模式搜索算法的基本原理

模式搜索法(Pattern search, PS)是一类直接搜索优化方法,起源于上世纪 50~60 年代,Hook 和 Jeeves^[12]发表的论文,是早期研究模式搜索法中影响最为深远的一篇经典文献。此后, Torczon^[13]完成了无约束非线性优化问题模式搜索算法的收敛性证明,并给出了模式搜索算法的框架,这类模式搜索法包括坐标搜索、Hooke-Jeeves 法及 Powell 共轭方向法等。后来, Lewis 等^[14-15]提出了矩形边界约束和线性约束的模式搜索方法,使模式搜索算法的理论趋于完善。

模式搜索算法由两类“移动”组成:一是“探索移动”,目的是揭示目标函数的变化规律,探测函数的下降方向;二是“模式移动”,目的是利用发现的函数变化规律,沿着有利方向加速寻找更好的点。模式搜索法的特点是简单、直观,不要求解函数的导数,且能够克服两个自由度交叉耦合的影响,其算法步骤为:

Step 1 初始化。给定初始点 $x^{(1)} \in E^n$, n 个坐标方向 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, 初始步长 δ , 加速因子 $a \geq 1$, 减缩率 $\beta \in (0, 1)$, 容许误差 $\epsilon > 0$, 置 $y^{(1)} = x^{(1)}$, $k = 1, j = 1$ 。

Step 2 如果 $f(y^{(j)} + \delta e_j) < f(y^{(j)})$, 则令 $y^{(j+1)} = y^{(j)} + \delta e_j$, 进行 Step 4; 否则, 进行 Step 3。

Step 3 如果 $f(y^{(j)} - \delta e_j) < f(y^{(j)})$, 则令 $y^{(j+1)} = y^{(j)} - \delta e_j$; 否则, 令 $y^{(j+1)} = y^{(j)}$ 。

Step 4 如果 $j < n$, 则置 $j = j + 1$, 转 Step 2; 否则, 进行 Step 5。

Step 5 如果 $f(y^{(n+1)}) < f(y^{(k)})$, 则进行 Step 6; 否则, 进行 Step 7。

Step 6 置 $x^{(k+1)} = y^{(k+1)}$, 令 $y^{(1)} = y^{(k+1)} + \alpha(x^{(k+1)} - x^{(k)})$, 置 $k = k + 1, j = 1$, 转 Step 2。

Step 7 如果 $\delta \leq \epsilon$, 则停止迭代, 得点 x^k ; 否则, 置 $\delta = \beta \delta, y^{(1)} = x^{(k)}, x^{(k+1)} = x^{(k)}$, 置 $k = k + 1, j = 1$, 转 Step 2, 再次循环迭代直到找到最优优点为止。

3.2 基于 PS 的梯形明渠临界水深计算的全局收敛性讨论

由 PS 的基本原理可知, PS 对于多极值目标函数的优化很容易陷入局部最优, 而对于单极值目标函数的优化, 则很容易搜索到全局最优值。采用模式搜索算法求解公式(6)的非线性约束优化问题时, 是否会陷入局部最优也是值得探究的问题。

设函数 $S = f(x_i), i = 1, 2, 3, \dots, k$ 已知; 其中 x 为自变量, i 为自变量个数。由 PS 的基本原理可知, PS 对变量 x_i 进行优化时, 视其他参数为常数。若在变量 x_i 的定义域内恒有 $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x_i} < 0$ (即 $f(x_i)$ 为变量 x_i 的单调函数), 则 PS 对函数 S 进行优化时就不会陷入局部最优, 而总能搜索到一组参数 $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_k]$, 使得函数值 S 最小。

通过以上讨论可知, PS 全局收敛的条件是 $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x_i} < 0$ (即函数 $f(x)$ 是参数 x_i 的单调函数)。对于梯形明渠, 临界流超越方程仅有 1 个参数, 即单位水面宽度, 其导数计算如下:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)^3}{x} - \frac{64am^3 Q^2}{gb^5} = 0 \quad (7)$$

为了计算方便, 设

$$k = \frac{64am^3 Q^2}{gb^5} = \frac{(x^2 - 1)^3}{x}$$

则方程(7)可简化为:

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 - kx \quad (8)$$

求式(8)的导数有:

$$\frac{df}{dx} = 6x(x^2 - 1)^2 - k \quad (9)$$

将 $k = \frac{(x^2 - 1)^3}{x}$ 代入式(9), 得:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x^2 - 1)^2(5x^2 + 1)}{x} \quad (10)$$

因单位水面宽度 $x > 1$, 故 $(x^2 - 1)^2 > 0, (5x^2 + 1) > 0$ 。

所以:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x^2 - 1)^2(5x^2 + 1)}{x} > 0 \quad (11)$$

由以上证明可知, 公式(5)是关于 x 的单调函数, 因此, 用 PS 对于该函数进行优化时不会产生局部收敛欺骗性, 对于在自变量范围内任意选取的初始值, PS 总能搜索到函数的真值。

4 应用举例

以文献[3]为例, 已知某梯形渠道的设计单宽流

量为 $q=790 \text{ m}^3/\text{s}$, 渠底宽度 $b=10 \text{ m}$, 边坡系数 $m=1$, 试求该梯形明渠的临界水深 h_c 。

根据上述参数, 应用 PS 算法对该算例进行求解, 计算参数取为: 初始点 $x=1.0$, 初始步长 $\delta=$

1.0 , 加速因子 $\alpha=2$, 减缩率 $\beta=0.5$, 允许误差 $\epsilon \leq 1 \times 10^{-6}$, 得到临界水深的计算结果如表 1 所示。表 1 还列出了现行几种计算方法的计算结果, 以期比较。

表 1 不同计算方法计算结果的比较

Table 1 Synthetical comparison of calculation results with different methods

计算方法 Computational method	单宽流量/ $(\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$ Unit discharge	底宽/m Bottom width	边坡 Side slope	临界水深计算值/m Calculated value of critical depth	最小目标函数值 Smallest objective function
PS 算法 Pattern search methods	790	10	1 : 1	21.919 5	0.000 001
文献[10] Reference [10]	790	10	1 : 1	21.919 6	0.000 002
文献[9] Reference [9]	790	10	1 : 1	21.913 0	0.000 056
文献[8] Reference [8]	790	10	1 : 1	21.890 0	0.110 413
文献[7] Reference [7]	790	10	1 : 1	21.924 0	0.017 580
文献[6] Reference [6]	790	10	1 : 1	22.293 0	0.983 420

从表 1 最小目标函数值可以直观看出, PS 算法求解临界水深时改善了计算结果, 提高了求解精度, 算法性能也较其他方法更优。

由于本研究中临界水深的超越函数是关于“单位水面宽度”的单调函数, 非线性方程的求解无局部收敛的欺骗性, 因此, 遗传算法、粒子群算法等并行优化方法对该实际问题的求解效果体现得并不非常明显, 算法的实现相对变得非常复杂, 而本研究提出的方法是一种成熟的确定性优化方法, 且算法实现简单, 从根本上改变了常规优化方法的求解机制, 为复杂函数的求解提供了一种快速、高效的优化方法。

5 结 论

1) 本研究引入无量纲参数——单位水面宽度的概念, 将临界流基本方程转化为无量纲参数 x 的超越函数, 并从理论上证明了梯形明渠临界流方程在 x 定义域内为单调函数。

2) 梯形明渠临界水深的计算问题实质上是一个含上下限的非线性优化问题, 因函数在自变量范围内为单调增函数, 所以可用确定性优化算法——模式搜索算法(PS)进行求解, PS 对该函数优化不会产生局部收敛欺骗性, 对于在自变量范围内任意选取的初始值, PS 总能搜索到函数的真值。

3) 实例计算结果表明, PS 算法能在自变量可能取值的整个区间 $[1, +\infty]$ 进行快速全局优化搜索, 与求临界水深的常用方法相比, 其精度更高、适用性更强。实际上, PS 适用于水利工程中的许多优化问题, 特别是水利工程计算中经常遇到的试算问题, 如马蹄形断面、蛋形断面临界水深的求解及天然河道水面线的推求、闸后消力池池深的计算等。

[参考文献]

- [1] Chow V T. Open-Channel Hydraulics [M]. London, McGRAW-HILL, 1973.
- [2] Chow V T. Intergrading the equations of gradually varied flow [J]. Proceedings, 1955, 81(11): 1-32.
- [3] Wang Z Z. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J]. HydrEng, 1998, 124 (1): 90-92.
- [4] Kurbanov S O, Khanov N V. Computation of critical depth of channels with polygonal profile [J]. Power Technol Eng, 2004, 38(2): 71-73.
- [5] Swamee P K, Rathie P N. Exact equations for critical depth in trapezoidal canal [J]. Irrig Drain Eng, 2005, 131(5): 474-476.
- [6] 王兴全. 明渠梯形临界水深计算公式的推求 [J]. 水利学报, 1989(2): 52-55.
Wang X Q. A formula for calculating critical depth of open channel with trapezoidal cross section [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1989(2): 52-55. (in Chinese)
- [7] 王正中, 袁 骊. 再论梯形明渠临界水深计算法 [J]. 水利学报, 1999(4): 14-17.
Wang Z Z, Yuan S. A final inquiry on a formula for calculating critical depth of open channel with trapezoidal cross section [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(4): 14-17. (in Chinese)
- [8] 王正中, 陈 涛, 万 斌, 等. 明渠临界水深计算方法总论 [J]. 西北农林科技大学学报: 自然科学版, 2006, 34(1): 155-161.
Wang Z Z, Chen T, Wan B, et al. Pandect for the calculating methods of the critical depth of opening channel in different typical cross sections [J]. Journal of North-west Sci-tech University of Agriculture and Forestry: Natural Science Edition, 2006, 34(1): 155-161. (in Chinese)
- [9] 赵延凤, 王正中, 张宽地. 梯形明渠临界水深的直接计算方法 [J]. 山东大学学报: 工学版, 2007, 37(6): 101-105.
Zhao Y F, Wang Z Z, Zhang K D. Direct calculation method for the critical depth of an open trapezoidal channel [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science Edition, 2007, 37(6): 101-105. (in Chinese)