第 37 卷 第 4 期
2009 年 4 月

西北农林科技大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest A&F University(Nat. Sci. Ed.)

Vol. 37 No. 4
Apr. 2009

梯形明渠正常水深的直接计算方法

赵延风[1],祝晗英[2],王正中[1],张宽地[1],芦 琴[1]

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院,陕西 杨凌 712100;2 西安市水务局 渭浐河管理中心,陕西 西安 710015)

[摘 要] 【目的】寻求梯形明渠正常水深的直接计算方法。【方法】针对梯形明渠正常水深计算时需求解高次隐函数方程,以及传统的查图表法或试算法计算复杂、误差大、适用范围小的缺点,通过引入无量纲水面宽度,根据数值计算方法,对梯形明渠均匀流的基本方程进行了恒等变形,得到了快速收敛的迭代公式,并与合理的迭代初值进行配合使用。【结果】提出了梯形明渠正常水深的直接计算公式。误差分析及实例计算表明,在工程最常用范围内,即无量纲水深 $x\in[0.1,2.0]$,梯形断面边坡系数 $m\in[0.5,4.0]$时,正常水深的最大相对误差仅为 0.78%。【结论】与现有公式相比,该直接计算公式物理概念明确、计算简捷、精度高、适用范围广。

[关键词] 梯形明渠;正常水深;直接计算方法;无量纲水深;无量纲水面宽度

[中图分类号] TV131.4 [文献标识码] A [文章编号] 1671-9387(2009)04-0220-05

A direct formula for normal depth in trapezoidal open channel

ZHAO Yan-feng[1],ZHU Han-ying[2],WANG Zheng-zhong[1],ZHANG Kuan-di[1],LU Qin[1]

(1 *College of Hydraulic and Construction Engineering,Northwest A&F University,Yangling,Shaanxi* 712100,*China*;
2 *Management Center of Weihe River and Chanhe River,Xi'an Water Affairs Bureau,Xi'an,Shaanxi* 710015,*China*)

Abstract:【Objective】The aim was to find the direct calculating formula for trapezoidal open channel of normal depth.【Method】The calculation of trapezoidal open channel of normal depth needs solving latent function formula with high exponent,which is hard to obtain;the traditional methods,trial computation or needing graphic chart method with complex calculating course,have high errors and small using-area. So this study obtains iterative formula for quick calculation by introducing non-dimensional surface's width and doing identical transfiguration to basic equation of normal depth for open trapezoidal channel based on calculating method,then it was used with rational quantity for the first iteration.【Result】This paper gets direct calculating formula,in the commonest fields of engineering,namely non-dimensional water depth $x\in[0.1,2.0]$,slope coefficient of cross section $m\in[0.5,4.0]$,error analysis. The application shows that the maximum error of normal depth is less than 0.78%.【Conclusion】This formula has definite physics concept,easy calculation,high precision and wide range compared with the existing formulas.

Key words: trapezoidal open channel;normal depth;direct calculating method;non-dimensional depth;non-dimensional surface width

梯形明渠的正常水深是梯形明渠均匀流水力计算中一个基本的水力要素,在水利水电、灌溉排水、城市供水等生产实践中广泛应用。由于其计算时需要求解一元高次方程,故无法直接求解,而传统的求解方法,如查图表法或者试算法,既费时又费力,而且精度不高。近 20 年来,国内外相继提出了许多新

* [收稿日期] 2008-05-27
[基金项目] 国家"863"高技术研究与发展计划项目(2002AA62Z3191);陕西省水利科技专项计划项目(2006-01)
[作者简介] 赵延风(1963-),男,陕西西安人,高级实验师,主要从事水力学研究。E-mail:yfz@nwsuaf.edu.cn

的计算方法[1-13],这些方法在工程实践中发挥了重要作用,但仍存在公式形式复杂、适用范围小、计算精度低等问题,至今尚没有一种集简捷、准确、适用范围广于一体的计算公式。为此,本研究通过引入无量纲水面宽度即单位水面宽度[14](相应于正常水深时的水面宽度与梯形渠道底宽的比值,文中用 λ 表示,$\lambda>1$),对梯形明渠均匀流的计算公式进行了恒等变形和推导,以期提出简捷、准确、适用范围广的直接计算公式供工程实践参考应用。

1　正常水深的计算公式及迭代式

由明渠均匀流的基本公式[15]可推出:

$$\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}=\frac{A}{X^{0.4}}。\tag{1}$$

式中:n 为渠道糙率;Q 为流量,$\mathrm{m^3/s}$;i 为渠道底坡;A 为梯形过水断面面积,$\mathrm{m^2}$;X 为湿周,m。

对于梯形明渠,有:

$$\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}=\frac{(b+mh)h}{(b+2h\sqrt{1+m^2})^{0.4}}。\tag{2}$$

设无量纲水面宽度

$$\lambda=\frac{B}{b}=1+\frac{2m}{b}h,\tag{3}$$

则有:

$$h=\frac{b}{2m}(\lambda-1)。\tag{4}$$

式中:b 为梯形渠道底宽,m;m 为梯形断面的边坡系数;h 为正常水深,m;B 为相应于正常水深时的水面宽度,m;λ 为相应于正常水深时无量纲水面宽度,其他符号意义同前。

将式(4)代入式(2)并整理,得:

$$\frac{\lambda^2-1}{[m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}}=\frac{4}{b}\cdot\left(\frac{mnQ}{i^{0.5}b}\right)^{0.6}。\tag{5}$$

设

$$k=\frac{4}{b}\cdot\left(\frac{mnq}{i^{0.5}}\right)^{0.6},\tag{6}$$

式中:q 为单宽流量,$\mathrm{m^3/(s\cdot m)}$,$q=Q/b$。

则式(5)可变为:

$$\frac{\lambda^2-1}{[m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}}=k。\tag{7}$$

由式(7)可得迭代方程:

$$\lambda=\sqrt{k[m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}+1}。\tag{8}$$

2　迭代公式的收敛性证明

根据迭代理论[16],如果方程 $x=\varphi(x)$ 的 1 个根为 α,则迭代公式 $x_{j+1}=\varphi(x_j)$ 收敛于 α 的条件是:在 α 的某一邻域 $|x-\alpha|<\delta$ 内,$|\varphi'(x)|<1$,那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 α。因此,只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1,就可以证明该迭代函数是收敛的。

对式(8),设

$$\lambda=\varphi(\lambda)。\tag{9}$$

则

$$\varphi'(\lambda)=\frac{0.4k[m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4-1}\times\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{k[m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}+1}}。\tag{10}$$

将式(7)、(8)代入式(10),得

$$\varphi'(\lambda)=\frac{0.2}{\lambda}\cdot\frac{(\lambda^2-1)\sqrt{1+m^2}}{m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}}。\tag{11}$$

因为 m 为梯形断面的边坡系数,$m>0$;λ 为无量纲水深,$\lambda>1$。

所以

$$0<\varphi'(\lambda)<0.2\times\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)<0.2\times2=0.4。\tag{12}$$

因此 $|\varphi'(\lambda)|<1$。

根据迭代理论,迭代式(8)对任意正数 λ 都收敛。

3　合理的迭代初值及正常水深的直接计算

对于迭代计算,其收敛速度不仅与迭代函数有关,而且与迭代初值密切相关,合理的迭代初值是迭代计算快速收敛的关键。迭代初值 λ_0 的取值方法如下:

首先在迭代公式(8)中,设

$$\alpha=m+(\lambda-1)\sqrt{1+m^2}。\tag{13}$$

在 $h/b\in[0.1,2.0]$,$m\in[0.1,5.0]$ 对 $h/b\sim k/m$ 值进行回归分析,拟合出最佳曲线为:

$$\frac{h}{b}=0.175\frac{k}{m}+0.0875。\tag{14}$$

将式(14)代入式(3),整理得:

$$\lambda-1=0.35(k+0.5m)。\tag{15}$$

而 $\sqrt{1+m^2}$ 在 $m\in[0.1,5.0]$ 时可近似地表示为 $0.8508m+0.6944$,将其与式(15)代入式(13)并整理,可得 α 的近似计算公式为:

$$\alpha=k(0.3m+0.25)+m(0.15m+1.125)。\tag{16}$$

将式(16)代入式(8),可得迭代初值为:

$$\lambda_0=(k\alpha^{0.4}+1)^{0.5}。\tag{17}$$

将式(17)代入式(8),得到无量纲水面宽度的直接计算公式为:

$$\lambda=\sqrt{k[m+(\lambda_0-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}+1}。\quad(18)$$

将式(18)代入式(4)中,就可得到梯形明渠的正常水深。

4 计算公式的精度评价

4.1 几种典型计算公式的比较

国内外计算梯形明渠正常水深的方法很多,但从相对简捷、准确、通用三个方面综合考察,有 3 套公式相对较好,并且给出了相对准确的迭代初值。其中王正中等[5]的公式(以下简称王正中公式)和刘庆国[6]公式(以下简称刘庆国公式)是通过先求得无量纲水深,再由 $x=h/b$ 求得正常水深,而郝树棠[7]公式(以下简称郝树棠公式)和本文公式是通过先求得无量纲水面宽度,再由 $\lambda=B/b$ 求得正常水深。下面就这 3 套公式与本文公式进行对比。

1)王正中公式:

$$k_w=\frac{1}{b}(\frac{nQ}{i^{0.5}b})^{0.6},$$

$$A_1=1.8\times0.47^{m^{\frac{1}{3}}},$$

$$A_2=1.2\times0.75^{m^{0.4}},$$

$$x_0=A_1\cdot k_w{}^{A_2},$$

$$x=\frac{\sqrt{1+4mk_w(1+2x_0\sqrt{1+m^2})^{0.4}}-1}{2m}。\quad(19)$$

2)刘庆国公式:

$$k_l=\frac{nQ}{i^{0.5}b^{8/3}},$$

$$x_0=0.91k_l^{0.56}-0.58k_l\lg m,$$

$$x=\frac{(1+2\sqrt{1+m^2}x_0)^{0.4}k_l{}^{0.6}}{1+mx_0}。\quad(20)$$

3)郝树棠公式:

$$k_h=\frac{m}{b}(\frac{nQ}{bi^{0.5}})^{0.6},$$

$$\alpha_h=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m},$$

$$\lambda_0=1+1.5k_h,$$

$$\lambda=[4k_h(1+\alpha_h\lambda_0-\alpha_h)^{0.4}+1]^{0.5}。\quad(21)$$

4)本文公式:

$$k=\frac{4}{b}\cdot(\frac{mnQ}{i^{0.5}b})^{0.6},$$

$$\alpha=k(0.3m+0.25)+m(0.15m+1.125),$$

$$\lambda_0=(k\alpha^{0.4}+1)^{0.5},$$

$$\lambda=\sqrt{k[m+(\lambda_0-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}+1}。\quad(18)$$

以上 4 套公式中,k_w、k_l、k_h、k 为各自公式的参数;α_h 为郝树棠公式中的边坡参数;α 为本文公式中的综合参数;x 为无量纲水深,$x=h/b$;x_0 为初值;λ 为无量纲水面宽度,$\lambda=B/b=1+2mh/b$;λ_0 为迭代初值。其他符号意义同前。当无量纲水深或无量纲水面宽度已知时,即可求出正常水深。

4.2 4 套公式的误差分析

为评价本文建立的直接计算方法的精确性,在工程最常用范围内,即在无量纲水深 $x\in[0.1,2.0]$和梯形断面边坡系数 $m\in[0.5,4.0]$时,由式(3)求出无量纲水面宽度 λ 值,再根据式(7)、(16)、(17)、(18)反求无量纲水面宽度 λ 以及正常水深的相对误差。王正中公式、刘庆国公式及郝树棠公式可根据已知的 $x=h/b$、m 值求出各自的 k_w、k_l 或 k_h 值,再根据各自的 1 组公式求出 x 或 λ 值以及正常水深的相对误差。由误差分析可知,4 套公式的结合评价结果见表 1。

表 1 4 种计算公式的综合比较与评价($h/b\in[0.1,2.0]$)

Table 1 Synthetical comparison and evaluation of four Different formula ($h/b\in[0.1,2.0]$)

公式 Formula	最大相对误差/% Maximum relative error			公式可用范围及最大相对误差 Applicable scope and the maximum relative error		综合评价 Comprehensive evaluation
	$m\in[0.1,0.5]$	$m\in[0.5,4.0]$	$m\in[4,10.0]$	m 可用范围 Applicable scope of m	可用范围内最大相对误差/% Maximum relative error	
王正中公式 Wang Z Z formula	−5.49	−1.92	−8.04	[0.5,4.0]	−1.92	直接计算,过程较简单,适用范围小 Direct calculation, simple course and small applicable area
刘庆国公式 Liu Q G formula	−2.790	150.77	—	—	—	需迭代 3 次,计算过程复杂 Need three iteration complex calculating course
郝树棠公式 Hao S T formula	−17.34	165.74	29.15	—	—	需迭代 3 次,计算过程复杂 Need three iteration complex calculating course
本文公式 Formula in this paper	−0.91	−0.78	−1.17	[0.1,10]	−1.17	直接计算,过程简单,精度高,适用范围广 Direct calculation, simple course, high precision and large applicable area

为了说明本文公式的适用性,特将梯形断面边坡系数由 $m\in[0.5,4.0]$扩大到 $m\in[0.1,10.0]$,然后用求出的相对误差结果,绘制 $m=0.1,0.5,1.0,2.0,3.0,4.0,7.0,10.0$ 时 4 套公式迭代计算 1 次的误差分布图(图 1),图中横坐标为无量纲水深 $x=h/b$,纵坐标为正常水深的相对误差。在图 1 中,当 $m=4.0,7.0$ 和 10.0 时,刘庆国公式无法正常计算。

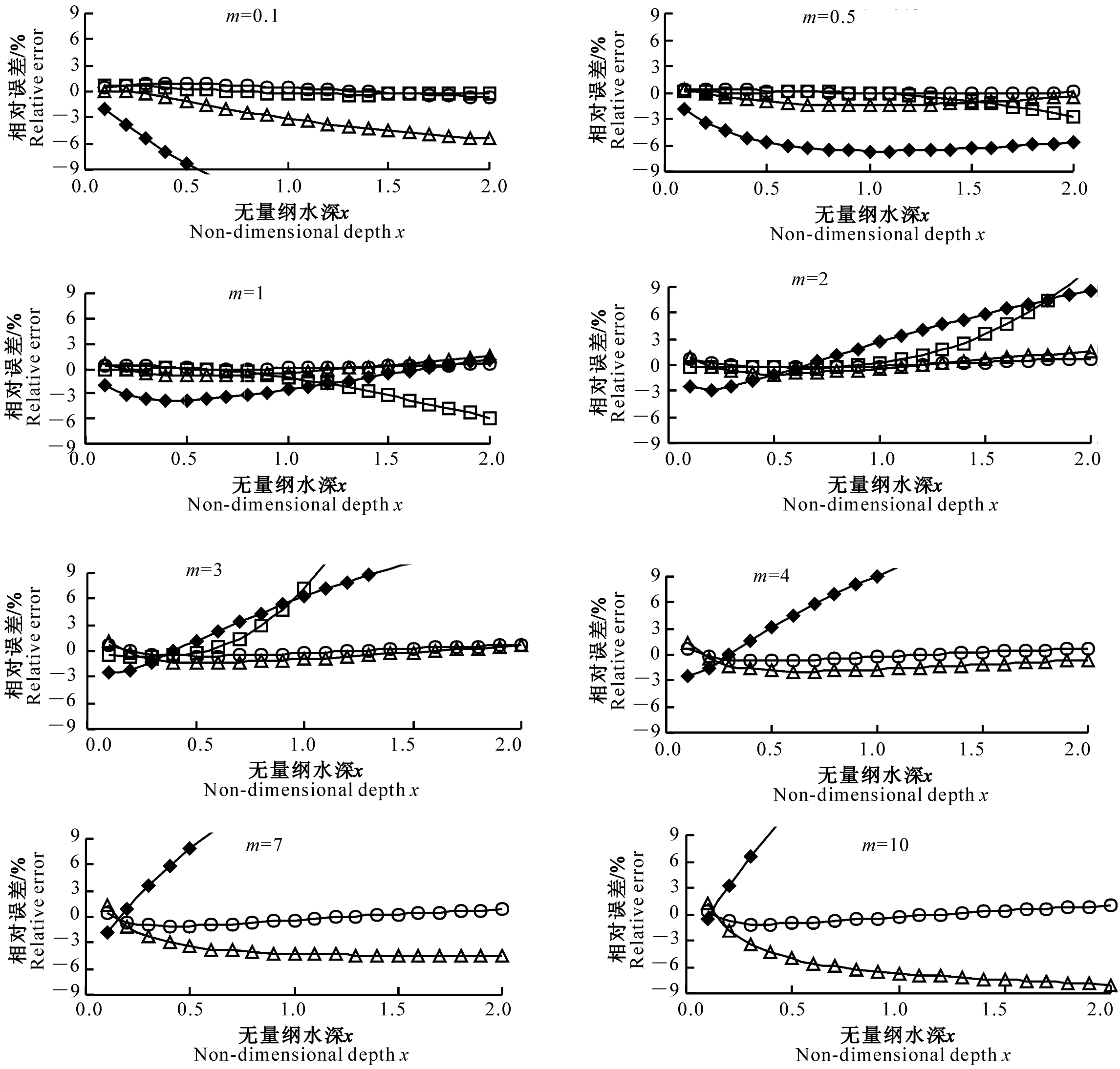

图 1　不同公式计算正常水深时相对误差的分布

—△—. 王正中公式;—◆—. 郝树棠公式;—□—. 刘庆国公式;—○—. 本文公式

Fig. 1　Distribution figure of relative error of normal depth with different calculating methods

—△—. WANG Z Z formula; —◆—. HAO S T formula; —□—. LIU Q G formula ; —○—. Formula in this paper

4.3　计算公式的评价

从公式的理论依据来看,4 套公式都是根据迭代理论推导的,但迭代格式及迭代初值取法各不相同。从公式的计算过程来看,刘庆国公式和郝树棠公式要经过 3 次迭代运算,而王正中公式和本文公式是直接计算公式。从公式的计算精度和简捷程度来看,本文公式精度更高,公式更为简捷。从公式的适用范围来看,本文公式适用范围更广。

5　应用举例

以文献[5]为例,有一梯形渠道,已知流量 $Q=3\ m^3/s$,底坡 $i=0.004\ 9$,粗糙系数 $n=0.022\ 5$,边坡系数 $m=1.0$,渠底宽度 $b=1$ m,求正常水深 h。

解:由式(6)可知:

$$k=\frac{4}{b}\cdot\left(\frac{mnQ}{i^{0.5}b}\right)^{0.6}=3.913\ 7;$$

由式(16)知:

$\alpha=k(0.3m+0.25)=m(0.15m+1.125)=3.4275$;

由式(17)知：

$\lambda_0=(k\alpha^{0.4}+1)^{0.5}=2.7214$;

由式(18)知：

$\lambda=\sqrt{k[m+(\lambda_0-1)\sqrt{1+m^2}]^{0.4}+1}=2.7223$;

由式(4)得正常水深：

$h=\frac{b}{2m}(\lambda-1)=0.8612$ m。

正常水深的精确解为：

$h=0.8613$ m。

用本文提出的直接计算公式，计算例题的相对误差为−0.012%，精度能够满足工程要求。

6 结 语

用本文直接计算法计算梯形正常水深，避免了烦琐的试算过程，且不依赖图表，公式简单、计算精度高，而且适用范围广，能满足工程实际要求，可供工程设计部门参考应用。

[参考文献]

[1] 李 蕊，王正中，王乃信，等. 梯形明渠正常水深直接算法[J]. 人民长江，2008，39(5)：50-51.
Li R, Wang Z Z, Wang N X, et al. Direct calculation method for the normal depth of open trapezoidal channel [J]. Yangtze River, 2008, 39(5): 50-51. (in Chinese)

[2] 徐文秀. Excel规划求解工具在水力计算中的应用[J]. 南昌工程学院学报，2008，27(1)：30-32.
Xu W X. Application of program solution in hydraulic computation using Excel [J]. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2008, 27(1): 30-32. (in Chinese)

[3] 褚苏服，王卫喜，刘大宏. 明渠水力计算中的神经网络模型[J]. 华北水利水电学院学报，2007，28(6)：17-19.
Chu S F, Wang W X, Liu D H. Artificial neural networks' application in hydraulic control of channel [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2007, 28(6): 17-19. (in Chinese)

[4] 张 迪，卫 玲，张春娟. 梯形渠道正常水深计算的迭代法[J]. 杨凌职业技术学院学报，2003，2(3)：30-31.
Zhang D, Wei L, Zhang C J. Iteration calculation of normal water depth for trapezoid channel [J]. Journal of Yangling Vocational and Technical College, 2003, 2(3): 30-31. (in Chinese)

[5] 王正中，席跟战，宋松柏，等. 梯形明渠正常水深直接计算公式[J]. 长江科学院院报，1998，15(6)：1-3.
Wang Z Z, Xi G Z, Song S B, et al. A direct calculation formula for normal depth in open trapezoidal channel [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 1998, 15(6): 1-3. (in Chinese)

[6] 刘庆国. 梯形明渠正常水深直接计算的迭代法[J]. 水利水电工程设计，1999(3)：31-33.
Liu Q G. Iteration method for calculation of normal depth in trapezoidal open channel [J]. Design of Water Resources & Hydroelectric Engineering, 1999(3): 31-33. (in Chinese)

[7] 郝树棠. 梯形渠道正常水深和底宽的迭代解[J]. 力学与实践，1995，17(4)：63-64.
Hao S T. Iterative calculation of normal depth and width of channel bottom in trapezoidal open channel [J]. Mechanics and Practice, 1995, 17(4): 63-64. (in Chinese)

[8] 葛节忠，王成现. 几种常用断面明渠均匀流水深和临界水深的迭代法[J]. 华北水利水电学院学报，2006，27(4)：33-36.
Ge J Z, Wang C X. On iteration algorithms of uniform flow depth and critical water depth in open channels [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2006, 27(4): 33-36. (in Chinese)

[9] 樊建军，刘金香，袁华山. 迭代法在明渠水力计算中的应用[J]. 中国给水排水，2001，17(6)：43-44.
Fan J J, Liu J X, Yuan H S. The apply of iteration in open channel calculation [J]. China Water & Wastewater, 2001, 17(6): 43-44. (in Chinese)

[10] 李治勤. 水力计算求解图的计算机实现[J]. 太原理工大学学报，2000，31(1)：64-67.
Li Z Q. A computer method for hydraulic calculation diagram [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2000, 31(1): 64-67. (in Chinese)

[11] Srivastava R. Exact solutions for normal depth problem [J]. Journal of Hydraulic Research, 2006, 44(3): 427-428.

[12] Mohammed A Y. Computation of normal depth in open channels [J]. Engineering Journal of University of Qatar, 1998, 11: 133-151.

[13] Barr D I H, Das M M. Direct solutions for normal depth using the manning equation [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1986, 81(2): 315-333.

[14] 赵延风，王正中，张宽地. 梯形明渠临界水深的直接计算方法[J]. 山东大学学报：工学版，2007，37(6)：101-105.
Zhao Y F, Wang Z Z, Zhang K D. Direct calculation method for the critical depth of an open trapezoidal channel [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science, 2007, 37(6): 101-105. (in Chinese)

[15] 吴持恭. 水力学[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，1979.
Wu C G. Hydraulics [M]. 2nd Ed. Beijing: High Education Press, 1979. (in Chinese)

[16] 关 治，陈景良. 数值计算方法[M]. 北京：高等教育出版社，1990.
Guan Z, Chen J L. Calculating method [M]. Beijing: High Education Press of, 1990. (in Chinese)