矩形断面明渠均匀流水力计算的直接计算公式

赵延风,张宽地,芦 琴

(西北农林科技大学 水利与建筑工程学院,陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 【目的】寻求矩形断面明渠均匀流水深和渠道底宽的直接计算公式。【方法】通过对矩形断面明渠均匀流水力计算公式进行恒等变形,推导出计算矩形明渠均匀流水深和渠道底宽的迭代公式,再与合理的迭代初值配合使用。【结果】得到矩形明渠均匀流水深和渠道底宽的直接计算公式,误差分析及实例计算表明,在工程常用范围内,矩形均匀流水深和渠道底宽的最大相对误差均小于 0.2%。【结论】该公式形式简捷,计算精度高,能满足工程实践要求。

[关键词] 矩形断面;明渠;均匀流;水力计算;直接计算公式

[中图分类号] TV131.4 [文献标识码] A [文章编号] 1671-9387(2008)09-0224-05

Formula on direct calculation of water depth of uniform flow in rectangular open channel

ZHAO Yan-feng, ZHANG Kuan-di, LU Qin

(*College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract:【Objective】The study was to seek the essence of calculating water depth and width of channel's bottom of rectangular open channel a good calculation-method.【Method】Through proper mathematic-exchange from the basic equation of rectangular open channel, the iterative formula for quick calculation of water depth and width of channel's bottom can be induced and used with the reasonable first iterative quantity.【Result】Through error analysis and calculation, in the practical area of engineering, the maximum error of water depth and width of channel's bottom of uniform flow in rectangular channel was less than 0.2 percent respectively.【Conclusion】The formula is short-cut and correct which can satisfy the requirement of engineering practice.

Key words: rectangular section; open channel; uniform flow; hydraulic calculation; direct calculation-formula

矩形断面是明渠输水渠道最常见的断面形式之一,广泛应用于农田灌排、水利水电、城市给排水等工程中。工程技术人员在渠道断面设计时必然遇到均匀流水深或矩形渠道底宽计算的问题。但由于该问题都要求解高次隐函数方程,工程中无法直接求解,传统的求解方法为查图表或者试算法,这些方法既费时又费力,而且精度不高。近 10 年来,国内外学者对梯形断面渠道的水力计算,已经提出了十分简捷的计算公式[1-10],且广泛应用于生产实践中,解决了不少工程实际问题。但在矩形断面渠道水力计算方面,目前所使用的方法还存在诸多缺陷,如李诚等[11]的近似计算公式形式简捷,但在工程常用范围内整个区间的计算精度不高;许延生等[12-13]的两套计算公式计算精度都非常高,但公式复杂,不便于生

* [收稿日期] 2007-09-20
[基金项目] 国家“863”高技术研究与发展计划项目(2002AA62Z3191);陕西省重大科技专项计划项目(2006-01)
[作者简介] 赵延风(1963—),男,陕西西安人,实验师,主要从事水资源和水力学研究。E-mail:yfz@nwsuaf.edu.cn

产实际应用；迭代计算法[14]中初值的选取具有盲目性，不合适的初值可能会导致迭代公式的不收敛，即使合理的初值也要通过 4～5 次的迭代运算，相对误差才能达到工程要求。为此，本研究通过对矩形断面均匀流水力计算公式进行数学变换，得到了一种形式简捷、精度高的直接计算公式，可供工程设计人员参考应用。

1　矩形断面均匀流水力计算公式及其迭代式

由明渠均匀流的计算公式[15]可推导出：

$$\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}=\frac{A}{X^{0.4}}。\tag{1}$$

矩形断面的水力要素：

$$A=bh,\tag{2}$$

$$X=b+2h。\tag{3}$$

式中：n 为渠道糙率系数；Q 为过水流量，$\mathrm{m^3/s}$；i 为渠底比降；A 为过水面积，$\mathrm{m^2}$；X 为矩形过水断面湿周，m；h 为均匀流水深，m；b 为矩形断面渠底宽度，m。

将式(2)、(3)代入式(1)中，得矩形断面均匀流的计算公式为：

$$bh=\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}(b+2h)^{0.4}。\tag{4}$$

对式(4)做数学变换，得

$$\frac{h}{b}=\frac{1}{b^{1.6}}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}\left(1+2\frac{h}{b}\right)^{0.4},\tag{5}$$

$$\frac{b}{h}=\frac{1}{h^{1.6}}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}\left(\frac{b}{h}+2\right)^{0.4}。\tag{6}$$

对式(5)，设 x 为无量纲水深，α 为求解水深时的无量纲参数，即：

$$x=\frac{h}{b},\tag{7}$$

$$\alpha=\frac{1}{b^{1.6}}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}。\tag{8}$$

对式(6)，设 y 为无量纲底宽，β 为求解底宽时的无量纲参数，即：

$$y=\frac{b}{h},\tag{9}$$

$$\beta=\frac{1}{h^{1.6}}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}。\tag{10}$$

将式(7)、(8)代入式(5)，可得均匀流水深无量纲迭代方程为：

$$x=\alpha(2x+1)^{0.4}。\tag{11}$$

将式(9)、(10)代入式(6)，可得矩形断面底宽无量纲迭代方程为：

$$y=\beta(y+2)^{0.4}。\tag{12}$$

即：

$$x_{j+1}=\alpha(2x_j+1)^{0.4},\tag{13}$$

$$y_{j+1}=\beta(y_j+2)^{0.4}。\tag{14}$$

2　迭代公式的收敛性证明

根据迭代理论[16]，如果方程 $x=\varphi(x)$ 的一个根为 L，则迭代公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛于 L 的条件是：在 L 的某一邻域 $|x-L|<\delta$ 内，$|\varphi'(x)|<1$，那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 L。因此，只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1，就可以证明该迭代函数是收敛的。

对式(11)，设

$$x=\varphi(x)。\tag{15}$$

即

$$\varphi'(x)=\alpha(2x+1)^{0.4}。\tag{16}$$

$$\varphi'(x)=\alpha\times0.4(2x+1)^{0.4-1}\times2=0.8\times\frac{\alpha}{(2x+1)^{0.6}}=0.8\times\frac{\alpha(2x+1)^{0.4}}{2x+1}。\tag{17}$$

将式(15)、(16)代入式(17)，得

$$\varphi'(x)=0.8\times\frac{x}{2x+1}<0.8\times\frac{2x+1}{2x+1}。\tag{18}$$

因为 $x>0$，则

$$|\varphi'(x)|<0.8<1。$$

根据迭代理论可知，迭代式(11)对任意正数 x 都收敛。

同样也可证明迭代式(12)对任意正数 y 都收敛。

3　合理迭代初值及均匀流水深和渠道底宽的直接计算

对于迭代计算，其收敛速度不仅与迭代函数有关，而且与迭代初值密切相关，合理的迭代初值是迭代计算快速收敛的关键。

对于 x、y 的取值范围，根据文献[15]，其取值范围一般为 $x\in[0.05,5]$，$y\in[0.2,20]$。因此，在该范围内，通过对 $\alpha\sim x$、$\beta\sim y$ 函数线形的分析及比对，可提出下述形式近似公式。

对无量纲矩形断面均匀流水深，有：

$$x_0=c_1\alpha^2+c_2\alpha。\tag{19}$$

式中：x_0 为无量纲矩形断面均匀流水深迭代初值；c_1、c_2 分别为二次项和一次项系数，为常数；α 意义同前。

对无量纲矩形断面渠道底宽,有:

$$y_0 = t_1\beta^2 + t_2\beta。 \quad (20)$$

式中:y_0 为无量纲矩形断面渠道底宽迭代初值;t_1、t_2 分别为二次项和一次项系数,为常数;β 意义同前。

式(19)、(20)形式简单,但问题的关键是系数 c_1、c_2、t_1、t_2 如何确定。根据文献[16],若在 $x \in [0.05,5]$,$y \in [0.2,20]$ 范围内,某组试验数据的标准差最小,由该组数据产生的最大相对误差在样本中也是最小的,则该组数据即为式(19)、(20)所求的系数。因此,在 x、y 取值范围内,以 x_0、y_0 为初值计算出 x、y 相对误差的标准差 s_x、s_y 最小为目标,以 c_1、c_2、t_1、t_2 步长为 0.005,对 $\alpha \sim x$、$\beta \sim y$ 值 600 多组数据进行优化计算,确定了式(19)、(20)的二次项和一次项系数。其中表 1 和表 2 中仅列出了优化计算的部分结果。

表 1 无量纲矩形断面均匀流水深初值函数二次项、一次项系数 c_1、c_2 的优化计算

Table 1 Optimal calculation of c_1, c_2 in equation of first parameter about water depth

c_2	$c_1=0.835$		$c_1=0.840$		$c_1=0.845$		$c_1=0.850$	
	最大相对误差 e_x/% The maximum relative error e_x	相对误差标准差 s_x Standard deviation of relative error s_x	最大相对误差 e_x/% The maximum relative error e_x	相对误差标准差 s_x Standard deviation of relative error s_x	最大相对误差 e_x/% The maximum elative error e_x	相对误差标准差 s_x Standard deviation of relative error s_x	最大相对误差 e_x/% The maximum relative error e_x	相对误差标准差 s_x Standard deviation of relative error s_x
0.985	−0.709	0.230	−0.614	0.195	−0.521	0.167	−0.430	0.142
0.990	−0.627	0.212	−0.531	0.177	−0.437	0.150	−0.348	0.116
0.995	−0.544	0.195	−0.447	0.160	−0.353	0.129	−0.263	0.093
1.000	−0.461	0.172	−0.363	0.137	−0.270	0.096	0.267	0.072
1.005	−0.379	0.135	−0.281	0.096	0.203	0.060	0.336	0.076
1.010	−0.297	0.098	−0.199	0.058	0.272	0.061	0.405	0.105
1.015	−0.215	0.064	0.218	0.059	0.342	0.094	0.474	0.110
1.020	0.266	0.069	0.288	0.095	0.411	0.101	0.544	0.117
1.025	0.336	0.104	0.360	0.106	0.480	0.107	0.613	0.127
1.030	0.406	0.122	0.435	0.109	0.549	0.116	0.682	0.140

表 2 无量纲矩形断面渠道底宽初值函数二次项、一次项系数 t_1、t_2 的优化计算

Table 2 Optimal calculation of t_1, t_2 in equation of first parameter about width of channel bottom

t_2	$t_1=0.355$		$t_1=0.360$		$t_1=0.365$		$t_1=0.370$	
	最大相对误差 e_y/% The maximum relative error e_y	相对误差标准差 s_y Standard deviation of relative error s_y	最大相对误差 e_y/% The maximum relative error e_y	相对误差标准差 s_y Standard deviation of relative error s_y	最大相对误差 e_y/% The maximum elative error e_y	相对误差标准差 s_y Standard deviation of relative error s_y	最大相对误差 e_y/% The maximum relative error e_y	相对误差标准差 s_y Standard deviation of relative error s_y
1.310	−0.979	0.339	−0.739	0.244	−0.508	0.153	−0.278	0.077
1.315	−0.918	0.324	−0.676	0.229	−0.446	0.139	0.220	0.067
1.320	−0.857	0.308	−0.614	0.210	−0.384	0.115	0.273	0.053
1.325	−0.795	0.280	−0.552	0.179	−0.322	0.085	0.325	0.056
1.330	−0.735	0.249	−0.491	0.147	−0.260	0.060	0.378	0.071
1.335	−0.675	0.217	−0.430	0.117	−0.198	0.048	0.430	0.082
1.340	−0.615	0.186	−0.370	0.091	0.219	0.059	0.483	0.093
1.345	−0.556	0.156	−0.309	0.073	0.272	0.076	0.535	0.106
1.350	−0.496	0.128	0.276	0.074	0.326	0.096	0.588	0.121
1.355	−0.436	0.105	0.327	0.083	0.380	0.104	0.640	0.136

表 1 和表 2 中的 e_x、e_y 分别为式(19)、(20)相对应系数在 x、y 取值范围内,以 x_0 和 y_0 为初值计算 x、y 的最大相对误差。从表 1 可以看出,x 相对误差的标准差最小值为 $s_x=0.058$,与之对应的系数 $c_1=0.840$,$c_2=1.010$,其最大相对误差为 −0.199%;从表 2 可以看出,y 相对误差的标准差最小值为 $s_y=0.048$,与之对应的系数 $t_1=0.365$,$t_2=1.335$,其最大相对误差为 −0.198%。因此,将 c_1、c_2、t_1、t_2 分别代入式(19)、(20)中,可得无量纲矩形断面均匀流水深及渠道底宽的迭代初值数学表达式为:

$$x_0 = 0.840\alpha^2 + 1.010\alpha, \quad (21)$$

$$y_0 = 0.365\beta^2 + 1.335\beta。 \quad (22)$$

将式(21)、(22)代入式(13)、(14)中,再代入式(7)、(9)中可得矩形断面均匀流水深及渠道底宽的直接计算公式为:

$$h=b\alpha(1.680\alpha^2+2.020\alpha+1)^{0.4}, \tag{23}$$

$$b=h\beta(0.365\beta^2+1.335\beta+2)^{0.4}。 \tag{24}$$

4　公式误差分析

根据文献[15],x 取值一般为 $x\in[0.05,5]$,y 是 x 的倒数,则 y 取值一般为 $y\in[0.2,20]$。实际工程中 x 超出[0.05,5]范围的情况很少出现,因此本研究中误差计算范围划定在 $x\in[0.05,5]$。而与 x、y 取值范围所对应的无量纲参数 α、β 的取值范围分别是 $\alpha\in[0.048,1.916]$,$\beta\in[0.146,5.808]$,误差分析见图 1,图 2。

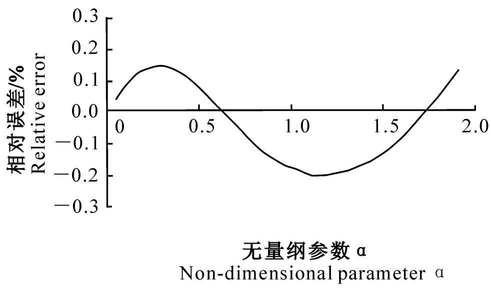

图 1　无量钢矩形断面均匀流水深相对误差分析
Fig. 1　Analysis figure about relative error of water depth

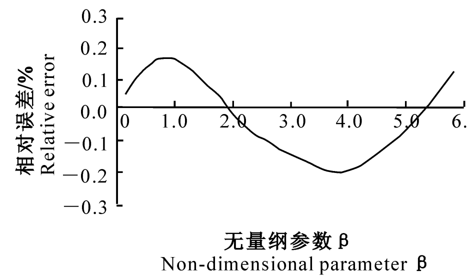

图 2　无量钢矩形断面渠道底宽相对误差分析
Fig. 2　Analysis figure about relative error of width of channel's bottom

由误差分析和图 1,图 2 可知,在工程常用范围内,本研究公式计算矩形断面渠道均匀流水深和底宽的最大相对误差均小于 0.2%。

5　应用举例

通过公式误差分析可知,对于矩形断面,不论是无量纲水深还是无量纲底宽计算,工程实践中一般是不会超出 $x\in[0.05,5]$,$y\in[0.2,20]$,因此无量纲参数 α、β 的取值也不会超出 $\alpha\in[0.048,1.916]$,$\beta\in[0.146,5.808]$。只要 α、β 不超出工程常用范围,水深和底宽的相对误差就小于 0.2%,下面举实例说明。

以文献[15]为例,某渠道采取料石砌护的矩形断面,料石砌护渠道的糙率系数 $n=0.013$,设计过水流量 $Q=31\ \mathrm{m^3/s}$,渠底比降 $i=0.001$。

(1)当均匀流水深 $h=3.5$ m,试求渠底宽度 b。

由式(10)计算可知,$\beta=\dfrac{1}{h^{1.6}}\left(\dfrac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}=0.620\ 4$,

由式(24)计算得,$b=h\beta(0.365\beta^2+1.335\beta+2)^{0.4}=3.355$ m。

本例渠底宽度的精确值为 $b=3.350$ m,用本文直接计算公式求得文献[15]中渠道底宽的相对误差 $\delta_y=(3.355-3.350)/3.350=0.149\%$,精度满足工程要求。

(2)同样,根据 $b=3.35$ m,可求均匀流水深 h。由式(8)计算得 $\alpha=\dfrac{1}{b^{1.6}}\left(\dfrac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}=0.665\ 4$,

由式(23)计算得 $h=b\alpha(1.680\alpha^2+2.020\alpha+1)^{0.4}=3.499$ m。

用本研究直接计算公式求得文献[15]中均匀流水深的相对误差 $\delta_x=(3.499-3.500)/3.500=-0.017\%$,精度满足工程要求。

6　结　论

与文献[11-14]所述公式比较,本研究提出的公式在满足较高精度的前提下,公式形式非常简捷,而且适用范围广泛,涵盖了工程常用范围。通过误差分析和算例也可以看出,本研究计算公式在工程常用范围内,均匀流水深和渠道底宽的误差均小于 0.2%,而且不依赖图表,避免了试算,是一种简捷的直接计算公式,计算精度完全满足工程实际要求,可供工程设计部门参考应用。

[参考文献]

[1]　王正中,陈　涛,万　斌,等.明渠临界水深计算方法总论[J].西北农林科技大学学报:自然科学版,2006,34(1):155-161.
Wang Z Z, Chen T, Wan B, et al. Pandect for the calculating methods of the critical depth of opening channel in different typical cross sections [J]. Journal of Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry: Natural Science Edition, 2006,34(1):155-161. (in Chinese)

[2]　王正中,袁　驷,武成烈.再论梯形明渠临界水深计算法[J].水利学报,1999(4):14-16.
Wang Z Z, Yuan S, Wu C L. A final inquiry on a formula for calculating critical depth of open channel with trapezoidal cross section [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(4):14-16. (in Chinese)

[3]　Wang Z Z. Formula for calculating critical depth of trapezoidal

open channel [J]. J Hydr Engrg,1998,124(1):90-92.

[4] Prabhata K S,Wu S,Katopodis C. Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J]. J Hydr Engrg,1999,125(7):785-786.

[5] 郝树棠.梯形渠道临界水深的计算及探讨 [J].水利学报,1994(8):48-52.
Hao S T. Calculation and discussion of critical depth for ladder-canal [J]. Journal of Hydraulic Engineering,1994(8):48-52.(in Chinese)

[6] 王正中,席跟战,宋松柏,等.梯形明渠正常水深直接计算公式 [J].长江科学院院报,1998,15(6):1-3.
Wang Z Z,Xi G Z,Song S B,et al. A direct calculation formula for normal depth in open trapezoidal channel [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute,1998,15(6):1-3.(in Chinese)

[7] 肖睿书,闫利国,李习群.梯(矩)形给排水渠道水力计算探讨 [J].给水排水,1994(6):36-40.
Xiao R S,Yan L G,Li X Q. Discussion about hydraulic calculation of trapezoidal(rectangular)section in water and wastewater channel [J]. Water&Wastewater Engineering,1994(6):36-40.(in Chinese)

[8] 郝树棠.梯形渠道正常水深和底宽的迭代解 [J].力学与实践,1995,17(4):63-64.
Hao S T. Iterative calculation of normal depth and width of channel bottom in trapezoidal open channel [J]. Mechanics and Practice,1995,17(4):63-64.(in Chinese)

[9] 刘庆国.梯形明渠正常水深直接计算的迭代法 [J].水利水电工程设计,1999(3):31-33.
Liu Q G. Iteration method for calculation of normal depth in trapezoidal open channel [J]. Design of Water Resources & Hydroelectric Engineering,1999(3):31-33.(in Chinese)

[10] Srivastava,Rajesh. Exact solutions for normal depth problem [J]. Journal of Hydraulic Research,2006,44(3):427-428.

[11] 李 诚,贺挽澜.矩形沟渠水深与底宽的直接计算公式 [J].中南公路工程,1999,24(1):17-19.
Li C,He W L. A direct calculation formula for water depth and width of channel's bottom in rectangular canal [J]. Central South Highway Eneineering,1999,24(1):17-19.(in Chinese)

[12] 许延生,伏广涛,侯召成.矩形明渠均匀流水深及底宽的算子分裂算法 [J].长江科学院院报,2000,17(4):5-7.
Xu Y S,Fu G T,Hou Z C. Operator splitting method for calculating uniform flow depths and bed widths of rectangular open channel [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute,2000,17(4):5-7.(in Chinese)

[13] 许延生,王楠楠,赵明雁.矩形明渠均匀流水深及底宽的渐近耦合算法 [J].三峡大学学报:自然科学版,2001,23(2):109-111.
Xu Y S,Wang N N,Zhao M Y. Asymptotic coupling algorithm for water depth and bed width of uniform flow in rectangular open channel [J]. Journal of University of Hydraulic and Electric Engineering:Natural Science Edition,2001,23(2):109-111.(in Chinese)

[14] 葛节忠,王成现.几种常用断面明渠均匀流水深和临界水深的迭代法 [J].华北水利水电学报,2006,27(4):33-36.
Ge J Z,Wang C X. On iteration algorithms of uniform flow depth and critical water depth in open channels [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power,2006,27(4):33-36.(in Chinese)

[15] 吴持恭.水力学 [M].北京:高等教育出版社,1979.
Wu C G. Hydraulics [M]. Beijing:Higher Education Press,1979.(in Chinese)

[16] 关 治,陈景良.数值计算方法 [M].北京:清华大学出版社,1990.
Guan Z,Chen J L. Value computational method [M]. Beijing:Tsinghua University Press,1990.(in Chinese)