

天敌胁迫下食饵种群动态数量模型参数的灰色估计

赵学达^{1a,2}, 刘光祖^{1a}, 赵慧燕^{1b}, 郑立飞^{1a}

(1 西北农林科技大学 a 理学院, b 植保学院, 陕西 杨凌 712100; 2 大连水产学院, 辽宁 大连 116023)

【摘要】 【目的】建立天敌胁迫下食饵种群动态模型的参数估计方法。【方法】利用灰色系统理论和灰色建模思想及差分等数学方法,对动态模型中的参数进行了估计。【结果】通过数学方法建立了动态模型参数的灰色估计公式,解决了天敌胁迫下食饵种群动态模型的参数估计问题。【结论】通过对4个小麦品种蚜虫资料实例的参数估计,表明所建议的灰色参数估计法是有效的。

【关键词】 食饵种群;动态模型;参数估计;灰色估计法

【中图分类号】 S431;O175

【文献标识码】 A

【文章编号】 1671-9387(2008)06-0185-04

Prey under nature enemy model parameter grey estimattion

ZHAO Xue-da^{1a,2}, LIU Guang-zu^{1a}, ZHAO Hui-yan^{1b}, ZHENG Li-fei^{1a}

(1a College of Science, b College of Plant Protection, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 College of Science Dalian Fishers University, Dalian, Liaoning 116023, China)

Abstract: 【Objective】 The paper gave the way to estimate parameter of the prey population dynamical model under natural enemy. 【Method】 Grey theory and modeling idea or difference were taken to estimate parameter for dynamic model. 【Result】 With mathematical analysis, a grey estimate formula was built for parameter of dynamic model, and solution to parameter estimation for prey population intimated by natural enemy was given. 【Conclusion】 This parameter estimation for aphid of four characters shows that grey estimation given in this paper is valid.

Key words: prey population; dynamic model; parameter estimation; grey-estimation method

在种群动态模型研究中,很多学者为生物世界的种群建立了种类众多的模型^[1-3],这些模型从不同角度对种群变化给予了描述,拓展了生态学研究的空间。起始于 Malthus 的人口研究,经改进由 Verhulst 首先提出的 Logistic 模型,就是其中重要的模型之一。长期以来,人们对 Logistic 模型不断进行应用研究,已经为其给出了种种拟合方法^[2,4-6],使 Logistic 模型得到了广泛应用。在为种群所建立各类模型中,最常见的是自治微分方程(组)模型,而许多微分方程是很难求得其解析解的,这在一定程度上制约了模型的应用。其实,在模型实际应用中,

虽不能求得其解析解,但只要能知道模型参数,就可以说明种群的某些特性和相互关系。基于此,本研究针对赵学达等^[3]建立的天敌胁迫下食饵种群的动态模型,利用灰色系统理论和灰色建模思想,建立了参数估计方法,以期对食饵种群的估计及有关模型的研究应用提供参考。

1 天敌胁迫下食饵种群动态模型的参数估计

1.1 天敌胁迫下食饵种群的动态模型

由于 Logistic 模型只是在理想状态下对单种群

* [收稿日期] 2007-06-19

[基金项目] 国家自然科学基金项目(39970122;30470268)

[作者简介] 赵学达(1977—),男,山东阳谷人,应用数学硕士,主要从事数学生态学研究。

[通讯作者] 刘光祖(1948—),男,陕西千阳人,教授,主要从事数学生态学研究。

数量动态的描述,而现实中的种群很少有不受外界干扰而独立存在的,因此单一种群动态模型即 Logistic 模型,并不完全适用于自然界中广泛存在的具有捕食关系的食饵种群。因此赵学达等^[3]研究建立了具有捕食关系的自然种群模型,即:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - \frac{Pk(N - N_m)}{(N - N_m) + d}, N > N_m. \quad (1)$$

式中, N 为食饵种群密度; r 为食饵种群内禀增长率; K 为自然状况下的食饵种群容纳量; P 为天敌种群密度, k 为天敌饱和捕食率, Pk 表示天敌饱和捕食量; $N - N_m$ 表示食饵种群中可以被天敌捕食的量,即当食饵种群密度达到最低限值 N_m 时,天敌将因捕食行为难于完成而迁移; $\frac{Pk(N - N_m)}{(N - N_m) + d}$ 表示天敌实际捕食量, d 为天敌捕食半饱和系数。

在此种群动态模型中,有 r, d, K, k, N_m 5 个待估参数。假设种群动态模型中的 d 和 N_m 已知,那么需要估计的参数只有 r, K, k 3 个。为此,可将方程式(1)改写为:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K}N^2 - k \frac{P(N - N_m)}{(N - N_m) + d}, N > N_m. \quad (2)$$

设 $a_1 = r, a_2 = r/K, a_3 = k$, 则式(2)可写成:

$$\frac{dN}{dt} = a_1 N - a_2 N^2 - a_3 \frac{P(N - N_m)}{(N - N_m) + d}, N > N_m. \quad (3)$$

1.2 模型参数的灰色估计法

设 $N^{(0)} = \{N^{(0)}(i), i = 1, 2, \dots, n\}$ 为非负食饵种群的原始数据序列, $P^{(0)} = \{P^{(0)}(i), i = 1, 2, \dots, n\}$ 为一非负的捕食者种群的原始数据序列。将由一个

$$\begin{cases} N(2) - N(1) = a_1 \frac{N(2) + N(1)}{2} - a_2 \left[\frac{N(2) + N(1)}{2} \right]^2 - a_3 \frac{P(2) + P(1)}{2} \left[\frac{N(2) + N(1) - 2N_m}{N(2) + N(1) - 2N_m + 2d} \right]; \\ N(3) - N(2) = a_1 \frac{N(3) + N(2)}{2} - a_2 \left[\frac{N(3) + N(2)}{2} \right]^2 - a_3 \frac{P(3) + P(2)}{2} \left[\frac{N(3) + N(2) - 2N_m}{N(3) + N(2) - 2N_m + 2d} \right]; \\ \dots \dots \dots \\ N(n) - N(n-1) = a_1 \frac{N(n) + N(n-1)}{2} - a_2 \left[\frac{N(n) + N(n-1)}{2} \right]^2 - a_3 \frac{P(n) + P(n-1)}{2} \left[\frac{N(n) + N(n-1) - 2N_m}{N(n) + N(n-1) - 2N_m + 2d} \right]. \end{cases} \quad (8)$$

用矩阵表示该方程组,有:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{B} \mathbf{a}. \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{N(2) + N(1)}{2} - \left[\frac{N(2) + N(1)}{2} \right]^2 - \frac{P(2) + P(1)}{2} \left[\frac{N(2) + N(1) - 2N_m}{N(2) + N(1) - 2N_m + 2d} \right] \\ \frac{N(3) + N(2)}{2} - \left[\frac{N(3) + N(2)}{2} \right]^2 - \frac{P(3) + P(2)}{2} \left[\frac{N(3) + N(2) - 2N_m}{N(3) + N(2) - 2N_m + 2d} \right] \\ \vdots \\ \frac{N(n) + N(n-1)}{2} - \left[\frac{N(n) + N(n-1)}{2} \right]^2 - \frac{P(n) + P(n-1)}{2} \left[\frac{N(n) + N(n-1) - 2N_m}{N(n) + N(n-1) - 2N_m + 2d} \right] \end{bmatrix};$$

序列建成的具有微分、差分和近似指数律兼容的模型,称为灰色建模^[7],灰色建模采用微分方程描述研究对象的动态行为,而且直接对模型中的参数进行估计,因而适合处理上述模型。

按照定义,有:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \quad (4)$$

对时间进行细化,假设原始调查数据时间间隔相对于种群变化时间间隔为足够小,当种群数量很大时,取时间间隔为单位时间间隔,则有

$$\frac{dN}{dt} \approx N(t + \Delta t) - N(t). \quad (5)$$

由灰色理论中灰导数和偶对数的映射关系可知, $\frac{dN}{dt}$ 可以表示成种群数量的一次累减。假设在 $N(t)$ 到 $N(t + \Delta t)$ 的 Δt 时段内,种群数量没有发生突变,取 t 时刻 $\frac{dN}{dt}$ 的背景值为 $N(t)$ 和 $N(t + \Delta t)$ 的平均值,即有:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) + N(t)}{2}. \quad (6)$$

将上式代入(3)式右端,离散化后为:

$$\begin{aligned} N(t+1) - N(t) &= a_1 \frac{N(t+1) + N(t)}{2} - a_2 \left[\frac{N(t+1) + N(t)}{2} \right]^2 - a_3 \frac{P(t+1) + P(t)}{2} \\ &\quad \left[\frac{N(t+1) + N(t) - 2N_m}{N(t+1) + N(t) - 2N_m + 2d} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

将 $t = 1, 2, \dots, n-1$ 时的原始数据依次代入式(7)中,可得到如下方程组:

$$\mathbf{X}_N = [N(2) - N(1), N(3) - N(2), \dots, N(n) - N(n-1)]^T;$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=[a_1,a_2,a_3]^T。$$

按照最小二乘法,则有

$$\hat{\boldsymbol{a}}=[a_1,a_2,a_3]^T=(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}_N。$$

公式(10)就是模型(1)的参数估计公式。根据变换前 r 、 K 、 k 和 a_1 、 a_2 、 a_3 的关系,即 $a_1=r$ 、 $a_2=r/K$ 、 $a_3=k$,可以得到 r 、 K 、 k 的值,从而解决了食饵种群动态模型(1)的参数估计问题。

1.3 Logistic 模型参数的灰色估计法

根据模型假设,如果食饵种群数量暂时低于 N_m ,此时调查数据中将没有捕食者出现,则食饵种群动态模型变为经典的 Logistic 模型,虽然关于此模型中参数 r 和 K 的估计方法已经很多,但其作为模型(1)的一种特殊情况,也可以利用灰色辨识法对其进行参数估计。在 Logistic 模型

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN(1-\frac{N}{K})$$

中,令 $a_1=r$ 、 $a_2=r/K$,则方程被离散化为:

$$N(t+1)-N(t)=a_1\frac{N(t+1)+N(t)}{2}-a_2[\frac{N(t+1)+N(t)}{2}]^2。$$

将 $t=1,2,\cdots,n-1$ 时的原始数据代入上式后,得到的方程组可用矩阵表示为:

$$\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{a}}。$$

其中, $\boldsymbol{X}_N=[N(2)-N(1),N(3)-N(2),\cdots,$

$$N(n)-N(n-1)]^T;$$

$$B=\begin{bmatrix}\frac{N(2)+N(1)}{2}-[\frac{N(2)+N(1)}{2}]^2\\ \frac{N(3)+N(2)}{2}-[\frac{N(3)+N(2)}{2}]^2\\ \vdots\\ \frac{N(n)+N(n-1)}{2}-[\frac{N(n)+N(n-1)}{2}]^2\end{bmatrix};$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=[a_1,a_2]^T。$$

按照最小二乘法,可得 Logistic 模型(11)的参数估计式为:

$$\hat{\boldsymbol{a}}=[a_1,a_2]^T=(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}_N。$$

由式(14)可得 $a_1=r$ 、 $a_2=r/K$ 的估计值,从而可求得参数 r 、 k 的值,由此可以得到 Logistic 模型的又一种参数估计方法。

利用以上参数估计公式,可以得到食饵种群动态模型的内禀增长率及饱和容纳量,从而可进一步研究无天敌的情况下食饵种群的动态增长规律。

2 应用举例

利用参数估计式(13),对胡想顺等^[8]2003 年所研究的陕西省不同品种小麦麦长管蚜种群数量的动态调查数据进行参数估计,其中小麦品种有德国品种 Xanthus、Batic、Astron 及美国品种 Amigo,其结果如表 1 所示。

表 1 不同品种小麦麦长管蚜数量的动态变化

Table 1 Numbers of *Sitobion avenae* aphides on different wheats

日期 Date	小麦品种 Variety			
	Xanthus	Batic	Astron	Amigo
04-04	0	0	0	0.066 667
04-11	0.086 667	0.108 889	0.408 889	0.133 333
04-18	0.642 222	0.755 556	0.775 556	1.100 000
04-25	1.897 778	2.420 000	2.822 222	4.000 000
05-02	9.820 000	11.240 000	13.306 670	15.400 000
05-09	121.080 000	106.526 700	110.540 000	28.800 000
05-16	91.873 330	122.360 000	53.133 330	104.300 000
05-23	64.080 000	73.473 330	47.400 000	122.100 000
05-30	13.506 670	19.480 000	14.066 670	8.400 000
06-06	0.100 000	0.213 330	0.073 000	0
06-13	0	0	0	0

数据处理时,以各个品种小麦上麦长管蚜一个增长阶段的数据作为基本数据。由表 1 可知,由于 04-18 之前各品种小麦上的麦长管蚜虫都很少;而到了 05-23,小麦趋于成熟,麦蚜危害的重要时期已过,

所以选择 04-18~05-23 间的数据作为处理对象,用数学软件 Matlab 对数据进行处理,得到各品种小麦麦长管蚜的内禀增长率(r)、实际内禀增长率(r')和容纳量(K),如表 2 所示。

表 2 不同品种小麦麦长管蚜内禀增长率和容纳量的计算结果

Table 2 Carrying capacity and intrinsic growth rate of *Sitobion avenae* aphids on different wheats

参数 Parameter	小麦品种 Variety			
	Xanthus	Batic	Astron	Amigo
内禀增长率(r) Intrinsic growth rate	4.672 5	3.093 6	6.962 2	1.903 1
实际内禀增长率(r') Real growth rate of natural increase	0.667 5	0.441 9	0.994 6	0.271 9
容纳量(K) Carrying capacity	100.917 9	119.906 9	75.593 9	126.033 1

注:由于试验调查数据为每周调查 1 次,实际的内禀增长率 r' 为内禀增长率 r 与 7 的商。

Note:Real growth rate is intrinsic growth rate divideed by 7,for experiment data was investigated once a week.

由表 2 可知,由于小麦 Xanthus 和 Batic 上麦长管蚜的内禀增长率和容纳量均较高,所以不适合作为我国小麦抗蚜育种的材料;小麦 Astron 上麦长管蚜虽然具有较低的容纳量,但却有较高的内禀增长率,故也不宜作为抗蚜育种材料;小麦 Amigo 上麦长管蚜的内禀增长率和容纳量均较小,可以作为我国小麦抗蚜育种的选择材料。这里只是通过 4 种不同品种小麦麦长管蚜的一个增长阶段来分析、研究其抗蚜性,而在选育抗蚜小麦品种的实际工作中,应在初步分析抗蚜性的基础上,对各小麦品种的各项抗蚜指标进行综合分析,才能进一步从中选出抗蚜性较好的小麦品种。

3 结论与讨论

1)赵学达等^[3]建立了天敌胁迫下的食饵种群动态模型,但目前尚没有关于其参数估计方法的报道。由于该模型是非线性自治微分方程,很难得到其解析解,因此借助于解函数求其参数是难以实现的。对此本研究提出了参数灰色估计法,即直接由方程估计参数,这在一定程度上扩大了该模型的应用范围。

2)对 Logistic 模型而言,由于能求得其解析解,因此其参数估计方法很多,如 0.618 法、三点法、四点法、麦侑法、牛顿迭代法等。本研究推导出的灰色参数估计法,完全不同于前述各种方法,其直接利用模型来估计参数,具有方法简单、易于应用等优点。算例验证结果表明,利用本研究建立的参数估计方法所得到的评价结果,与文献[8]的研究结果基本相符,准确性满足要求。

[参考文献]

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究 [M]. 安徽:合肥教育出版社,1994.
Ma Z E. Population Ecological Modelling and Research[M]. Anhui:Hefei Education Press,1994. (in Chinese)

[2] 杨琪瑜. 单种群生长的广义 Logistic 模型中参数的一种估值方法 [J]. 生物数学学报,1997,12(4):316-320.
Yang Q Y. A numerical method of estimating the parameters in a generalized Logistic model of single populations growth [J]. Journal of biomathematics,1997,12(4):316-320. (in Chinese)

[3] 赵学达,赵惠燕,刘光祖,等. 天敌胁迫下食饵种群动态模型的突变分析 [J]. 西北农林科技大学学报:自然科学版,2005,33(4):65-68.
Zhao X D,Zhao H Y,Liu G Z,etal. Catastrophe analysis of a predator model with prey [J]. Journal of Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry:Nalural Seienle Edition,2005,33(4):65-68. (in Chinese)

[4] 蔡煜东,陈德辉. 运用遗传算法拟合 Logistic 曲线的研究 [J]. 生物数学学报,1995,10(1)59-63.
Cai Y D,Chen D H. A study on optimum fitting Logistic curve by genetic algorithm[J]. Journal of Biomathematics 1995,10(1):59-63. (in Chinese)

[5] 王红春,陈平留. 三次设计结合模矢法拟合 Logistic 曲线的研究 [J]. 生物数学学报,1999,14(4):453-458.
Wang H C,Chen P L. A study on optimum fitting of Logistic curve by combinatorial method of three Design and Pattern Search [J]. Journal of Biomathematics,1999,14(4):453-458. (in Chinese)

[6] 延晓冬,赵士洞. 崔-Lawson 和 Logistic 方程参数的优化估计方法 [J]. 应用生态学报,1991,2(3):275-279.
Yan X D,Zhao S D. An optimal method of parametr estimation for Logistic and Cui-Lawson equations [J]. Chinese Journal of Applied Ecology,1991,2(3):275-279. (in Chinese)

[7] 孟广武. 灰色系统理论 [M]. 济南:山东科技出版社,1997.
Meng G W. Gray-System Theory [M]. Jinan;Shandong Science Publishing House,1997. (in Chinese)

[8] 胡想顺,赵惠燕,Heimbachu,等. 3 个新引进小麦品种对麦长管蚜抗性的初步研究 [J]. 西北植物学报,2004,24(7):1221-1226.
Hu X S,Zhao H Y,Heimbach,etal. Study on cereal aphid resistance on three winter wheat cultivars introduced into China [J]. Acta Botanica Boreali-occidentalia Sinica,2004,24(7):1221-1226. (in Chinese)