

灰色自记忆模型及其在新疆和田地下水埋深预测中的应用

沈冰^{1,2}, 刘敏², 黄领梅²

(1 西北农林科技大学 农业水土工程教育部开放实验室, 陕西 杨凌 712100;

2 西安理工大学 西北水资源与环境生态教育部重点实验室, 陕西 西安 710048)

[摘要] 运用灰色微分方程与自记忆原理相结合的方法, 建立了地下水埋深预测的灰色自记忆模型, 并以新疆和田市地下水长期观测井GW 9为例进行了埋深模拟和预测。结果表明, 该模型具有较高的模拟及预测精度, 且简洁实用。

[关键词] 灰色微分方程; 自记忆原理; 地下水埋深预测; 新疆和田

[中图分类号] S273.4

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2006)11-0223-04

地下水埋深动态变化是一个复杂的水文过程, 其受到一系列自然和人为因素的影响。准确地预测地下水埋深变化, 对于农业灌溉规划具有实际意义, 特别对于非灌溉天然植被有着重要意义。地下水埋深动态预测有多种方法, 传统的方法有确定性模型和随机模型, 其中确定性模型的求解主要有解析法、数值法和物理模拟法; 随机性模型有回归分析法、频谱分析法等, 但由于这些模型本身复杂或大量的物理参数难以获得, 因而不便在实际中应用。近年来, 根据系统的观点对地下水埋深序列进行分析建模的预测方法有所应用, 如模糊识别、人工神经网络等, 但这些方法均需要分析确定影响地下水埋深动态变化的主要因素, 并需要收集整理与地下水埋深动态观测序列相一致的各种影响因素观测序列, 故在实际应用中尚存在一定困难^[1]。

本研究采用灰色微分方程与自记忆原理相结合的方法, 即由灰色系统方法导出GM (1, 1)微分方程, 再进一步建立自记忆方程预报模型, 该方程只涉及地下水埋深序列本身, 避免了多种影响因素数据的收集整理, 具有简洁方便的特点。用其对新疆和田市地下水长期观测井GW 9的埋深进行了模拟及预测, 现将结果报道如下, 以期对地下水埋深的准确预测提供参考。

1 建模原理

本文建模的思路: (1) 数据归一化处理; (2) 导出系统的GM (1, 1)微分方程; (3) 建立灰色自记忆模型; (4) 进行模拟和预测。

1.1 灰色微分方程

GM (1, 1)是一阶单变量的微分方程模型, 是用一阶线性常微分方程来描述灰色系统单序列动态情况的模型, 可以对水文单因素进行中长期预报^[2-3]。

设原始时间序列为 $x^0 = (x^0(1), x^0(2), \dots, x^0(n))$, 对其进行一次累加生成(1-A GO), 记生成数据序列为 x^1 , 有 $x^1 = (x^1(1), x^1(2), \dots, x^1(n)) = (x^0(1), x^1(1) + x^0(2), \dots, x^1(n-1) + x^0(n))$, 得到的新数据序列与原始数据序列相比较, 其随机程度大大弱化, 平稳程度大大增加。

对 x^1 建立白化形式微分方程:

$$\frac{dx^1}{dt} + ax^1 = u \quad (1)$$

式中, a 为发展灰数, 其预测对象的变化趋势; u 为内生控制灰数。若令 $\hat{a}$ 为待估参数向量, 则有:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} \quad (2)$$

利用最小二乘法求解,

· [收稿日期] 2005-11-14

[基金项目] 国家自然科学基金项目(50579063); 西北农林科技大学农业水土工程教育部开放实验室基金项目

[作者简介] 沈冰(1948-), 男, 浙江湖州人, 教授, 主要从事干旱地区水文水资源研究。

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (3)$$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x^1(1) + x^1(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^1(2) + x^1(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x^1(n-1) + x^1(n)] & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$Y_N = [x^0(2), x^0(3), \dots, x^0(n)]^T \quad (5)$$

在式(1)中, 令 $\frac{dx^1}{dt} = F$, 移项后得, $F = u - ax^1$ 。

1.2 自记忆方程

1.2.1 自记忆原理 诸多自然现象和社会现象均是不可逆的。对不可逆现象的研究使得记忆概念被引入到无生命现象中, 基于物理运动不可逆性提出的自记忆原理, 针对有微分方程描述的动力系统, 可以建立相应的自记忆模型^[4-5]。

设系统动态微分方程为:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(x, \lambda, r, t) \quad (6)$$

式中, x 为变量; λ 为参数; r 为空间; t 为时间。则式(6)也可以写为方程组形式:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F(x_i, \lambda, r, t), i = 1, 2, \dots, N$$

式中, N 为整数; x_i 为第 i 个变量。为简便计, 以下只考虑 1 个变量 x 。定义记忆函数 $\beta(r, t)$, 且 $|\beta(r, t)| \leq 1$, β 为 r 和 t 的函数, 当固定在空间点 r_i 上时, 在 β 中省写 r^0 , 在希尔伯特空间中定义内积为

$$(f, g) = \int f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon, f, g \in L^2 \quad (7)$$

运用此内积运算对系统微分方程进行变换, 并设变量 x 和 β 连续、可微、可积, 令 $\beta_t \equiv \beta(t)$, $\beta_0 \equiv \beta(t_0)$, $x_i \equiv x(t_i)$, $x_0 \equiv x(t_0)$, 余此类推。由微积分中的分部积分和中值定理可推导得到 1 个回溯阶为 p 的差分-积分方程, 即为自记忆性方程, 可表示为

$$\beta_t x_t - \beta_{-p} x_{-p} - \sum_{i=-p}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i) - \int_{-p}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau = 0 \quad (8)$$

式中, $x_i^m \equiv x(t_i)$, $t_i < t_m < t_{i+1}$ 。式(8)强调了系统状态前后时序之间的联系, 即系统自身的记忆性, 用历史资料确定记忆函数, 就可进行模拟或预报。

由引入记忆函数将微分方程转换为差分-积分

方程并求解的原理, 称为自记忆性原理^[6-7]。

1.2.2 自记忆建模 以前述灰色系统理论建立的 $\frac{dx^1}{dt} = F$ 作为 1 个动力核, 可运用系统自记忆原理, 导出系统的自记忆方程。为叙述方便, 以下用 x 代替 x^1 。

对 p 阶自记忆方程式(8)进行离散化, 用求和代替积分, 微分变为差分, 中值 x_i^m 用 2 个时次的值代替。令 $x_{-p} = x_{-p-1}$, $\beta_{-p-1} = 0$, 取时次为等距间隔, 即令 $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1$, 则得式(7)的离散形式为

$$x_t = \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_i y_i + \sum_{i=-p}^0 \theta_i F(x, i) \quad (9)$$

式中, α, β 为记忆系数, $\alpha = (\beta_{i+1} - \beta_i) / \beta_i$, $\theta = \beta_i / \beta_i$

$$x_i^m = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) \equiv y_i \quad (10)$$

$$F(x, i) = ax_i + u_0 \quad (11)$$

利用 L 个时次的历史资料, 用最小二乘法求记忆系数 α 和 β , 记为

$$X_t = \begin{bmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ \vdots \\ x_{tL} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{-p-1} \\ \alpha_{-p} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{-p-1,1} & y_{-p-1,2} & \cdots & y_{0,1} \\ y_{-p-1,2} & y_{-p-1,3} & \cdots & y_{0,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{-p-1,L} & y_{-p-1,L+1} & \cdots & y_{0,L} \end{bmatrix}$$

由 θ 组成的向量 $\Theta_{(p+1) \times 1}$ 和由 $F(x, i)$ 组成的矩阵 $F_{L \times (p+1)}$ 可仿 $\alpha_{(p+1) \times 1}$ 及 $Y_{L \times (p+1)}$ 类似表达。则式(9)的矩阵形式为

$$M_t = Y\alpha + F\Theta \quad (12)$$

若令

$$M = [Y, \dots, F], W = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \Theta \end{bmatrix}$$

则有

$$X_t = MW$$

求出系数矩阵 W 后, 即可进行模拟或预报^[7-8]。

2 自记忆模型的应用

根据新疆和田市地下水长期观测井 GW9 2000~2003 年 48 个月的月平均地下水埋深观测资料*, 从中选取前 36 个月(2000~2002 年)的资料进行建模, 用 2003 年 12 个月的资料对模型进行预测检

* 和田水文水资源勘测局 塔里木盆地灌溉与环保二期项目: 水盐检测报告[R]. 2004

验。首先采用下式对地下水埋深序列做归一化处理

$$H_t = (H_t^0 - H_{av}) / H_{max} \quad (13)$$

式中, H_t 为新序列; H_t^0 为原序列; H_{av} 为序列平均值; H_{max} 为序列最大值。

求得新序列的GM (1, 1) 微分方程为:

$$F = 8.0236e^{-0.04} - 0.0051x \quad (14)$$

按照式(9)进一步建立自记忆预报模型, 并取回溯阶数为3, 则有

$$H_t = \sum_{i=1}^3 \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i F(x, i)$$

表1 新疆和田市地下水埋深实测值与灰色自记忆模型模拟值的比较(2000-06~ 2002-12)

Table 1 Comparison between measured groundwater depth and simulated value with grey self-memory model from June, 2000 to December, 2002

序号 No.	实测值/m Measured	模拟值/m Simulated	相对误差/% Relative error	序号 No.	实测值/m Measured	模拟值/m Simulated	相对误差/% Relative error
6	7.23	7.36	1.90	22	6.43	6.22	-3.29
7	7.07	6.98	-1.23	23	6.50	6.60	1.65
8	6.74	6.89	2.23	24	6.72	6.62	-1.43
9	6.36	6.44	1.28	25	6.75	6.99	3.64
10	6.27	6.16	-1.76	26	6.99	6.80	-2.66
11	6.48	6.36	-1.84	27	7.11	7.23	1.72
12	6.59	6.76	2.49	28	7.18	7.12	-0.88
13	6.75	6.74	-0.03	29	7.40	7.18	-3.07
14	6.99	6.98	-0.12	30	7.31	7.46	1.97
15	7.11	7.19	1.14	31	7.00	7.05	0.66
16	7.18	7.15	-0.46	32	6.68	6.70	0.23
17	7.40	7.18	-3.07	33	6.38	6.44	0.90
18	7.31	7.46	1.97	34	6.43	6.22	-3.29
19	7.00	7.05	0.66	35	6.50	6.60	1.65
20	6.68	6.70	0.23	36	6.72	6.62	-1.43
21	6.38	6.44	0.90				

表2 新疆和田市地下水埋深实测值与灰色自记忆模型预测值的比较(2003-01-12)

Table 2 Comparison between measured groundwater depth and predicted value with grey self-memory model on Jan. 12, 2003

序号 No.	实测值/m Measured	预测值/m Simulated	相对误差/% Relative error	序号 No.	实测值/m Measured	预测值/m Simulated	相对误差/% Relative error
37	6.72	6.88	2.43	43	7.28	6.84	-6.09
38	6.84	7.02	2.63	44	6.93	6.70	-3.37
39	6.99	7.13	2.05	45	6.52	6.60	1.23
40	6.93	7.17	3.46	46	6.29	6.41	1.85
41	7.02	7.11	1.28	47	6.47	6.64	2.68
42	7.25	6.99	-3.54	48	6.63	6.76	2.01

模拟及预测结果(表1, 2)表明, 通过灰色系统方法建立微分方程, 再根据自记忆原理建立预测模型, 可显著提高模拟和预测精度, 模拟精度的相对误差均在4%以内, 且能很好地反映其变化趋势; 预测精度的相对误差大多数在4%以内, 仅2003-07的(-

式中, $\alpha_6 = -3.4009$; $\alpha_1 = 6.4749$; $\alpha_2 = -5.6888$; $\alpha_3 = 3.4487$; $\theta_1 = 8.4688$; $\theta_2 = 8.3683$; $\theta_3 = 8.5926$; $\theta_4 = 8.2752$ 。

反推式(13), 将模型得到的结果进行还原, 可得

$$H_t^0 = H_{max} \times H_t + H_{av} \quad (15)$$

用所建模型, 模拟2000-06~ 2002-12的31个月地下水埋深值(对应编号为6~ 36), 因回溯阶原因, 缺2000-01~ 05月的模拟值(对应编号为1~ 5); 预测2003年12个月的地下水埋深值(对应编号为37~ 48), 模型模拟及预测结果与实测值的比较见表1, 2。

6.09%)例外。但对6~ 9月份的趋势预测还不太令人满意, 经分析, 地下水埋深受多种自然因素和人为因素影响, 且地下水埋深变化除有年内变化外, 还有年际变化, 而2003年地下水埋深波动较前几年大, 在最大值出现之前已出现过1次极大值。

3 结 语

本研究将灰色系统方法和自记忆原理相结合,建立了地下水埋深预测模型。该模型具有简洁实用的优点: (1) 无需分析研究影响地下水埋深的各种因素,只需要有一定长度的地下水埋深观测资料系列; (2) 由灰色理论导出系统动力模式较其他方法简单

方便; (3) 由灰色微分方程建立的自记忆模型求记忆系数时,其计算量较用其他动力方程建立的自记忆模型相对较少; (4) 在模型中运用历史观测值来估计记忆系数,蕴涵了历史观测值中对预报有用的信息,因而能够显著提高预报的准确率。如何在灰色自记忆模型中考虑各种要素的影响,以进一步提高模拟和预测精度,还有待今后进一步深入研究。

[参考文献]

- [1] Wu Yan-qing Prediction of variations in groundwater quality in Weinan water resources fields near the rivers in Xi'an[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2000, 16(3): 234-237.
- [2] 徐建华 现代地理学中的数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004
- [3] 曹鸿兴 动力系统自忆性原理——预报和计算应用[M]. 北京: 地质出版社, 2002
- [4] 沈冰, 李荣峰, 黄领梅, 等 年径流预测的灰色自记忆模型[J]. 西北农林科技大学学报: 自然科学版, 2005, 33(4): 132-134; 138
- [5] 李荣峰, 沈冰, 张金凯 考虑周期性变化的地下水埋深预测自记忆模型[J]. 农业工程学报, 2005, 21(7): 34-37.
- [6] 钟建生, 封国林, 曹鸿兴, 等 Logistic 自记忆模型的研究[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2000, 3(1): 19-22
- [7] 黄领梅 水文要素对人类活动响应的研究——以和田河流域为例[D]. 陕西西安: 西安理工大学, 2005
- [8] 李荣峰 水文非线性时间序列分析的自记忆模型研究[D]. 陕西西安: 西安理工大学, 2005

Grey self-memory model and its application in the prediction of groundwater depth in Hotan, Xinjiang

SHEN Bing^{1,2}, LIU Min², HUANG Ling-mei²

(¹Open-oriental Laboratory of Agriculture Water and Soil Engineering,

Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

²Northwest of Water Resources and Environment Ecology Key Laboratory at XAUT, Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract: By combining the grey differential equation with self-memory theory, the grey self-memory model for groundwater depth prediction was established in Hotan, and it was used to predict groundwater depth of observation well GW9 as a case study. The results show that the suggested model is of high simulation and prediction accuracy with the merits of simple and practical application.

Key words: grey differential equation; self-memory theory; prediction of groundwater depth; Hotan, Xinjiang