

二维网格结构的拟膜分析法

史 姣¹, 王正中¹, 蔡 坤²

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

2 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

[摘 要] 分析了具有正交对角型单胞的平面网格结构。将其比拟为平面膜结构, 并求出膜的面内刚度参数。给出平面网格结构嵌入各向同性基体材料而成的复合材料板的弹性本构参数表达式, 并用数值方法简单验证了复合材料弹性本构参数表达式的正确性。

[关键词] 二维网格结构; 拟膜法; 单胞; 复合材料; 弹性本构参数

[中图分类号] TV31

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2006)03-0147-05

近年来, 预测具有周期微结构的非均匀材料(结构)的力学性能成了一个研究热点^[1-5]。对非均匀材料弹性本构的研究方法主要有均匀化方法和代表体元法。这些方法的基本思想是将(准)周期微结构(单胞)转化为均质连续体, 并推测出材料的宏观本构。如 Wang^[1]用 RVE 方法分析碳纳米管, 将其连续体化, 并分析了单胞面内的有效刚度。Masters 和 Evans^[2]分析了平面蜂窝结构的弹性参数。宏观结构分析中, 离散结构的连续体化研究及应用也非常成功, 如: Tollenaere 和 Caillerie^[1]给出一种准周期网格结构连续体化方法, 并分析了二维结构的静态变形; 董石麟和夏亨熹^[5-7]提出网架结构的拟板分析法, 分析了网架结构的连续体化, 给出结构的等效刚度。Vasiliev 等^[8]介绍了各向异性网格结构的发展和应用。用连续介质比拟非均匀材料(结构)的主要原因是, 分析非均匀材料(结构)的计算量太大。若将原材料(结构)连续体化, 可采用较大尺寸的有限单元^[9-10]离散结构, 分析时计算效率提高很大。

上述工作中, 分析对象的尺度分别是微观(碳纳米管^[2])、细观(蜂窝材料^[2,3])和宏观(网架结构^[1-5])。分析对象的相似点是整体结构具有周期性微结构, 微结构的尺度相比整体结构很小; 差别是单胞尺度和几何形状不同。基于对以上各种方法的考察, 本文给出拟膜分析法。拟膜分析法是指将平面网格结构与连续体—拟膜在力学行为上相互比拟。

为了表达拟膜分析法的思想及应用价值, 文中给出了一种二维网格结构, 这种网格结构具有周期

的正交一对角铰接构造的单胞模型, 将拟膜的弹性参数由网格结构单胞中各杆件的材料和几何参数解析表示; 给出了网格结构嵌入各向同性基体材料中形成的二维复合材料的弹性本构参数的表达式; 用数值验证了复合材料的弹性本构参数的正确性。

1 网格结构单胞的几何模型及其拟膜的参数计算

1.1 单胞模型的几何结构

图 1 和表 1 给出了正交一对角铰接网格结构单胞的构造方式及各杆件的材料和几何参数。

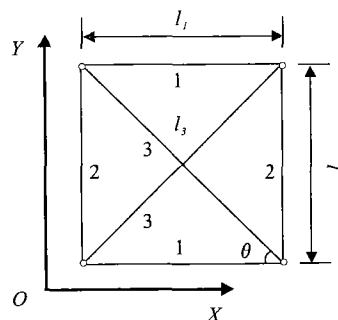


图 1 正交一对角平面网格结构单胞的几何模型

Fig. 1 Geometry model of the orthogonal-diagonal unit cell of plane lattice structure

图 1 中 X 方向杆件和 Y 方向杆件铰接在一起。两根斜向杆件分别与 X 方向和 Y 方向的杆件铰接, 但两根斜杆之间没有直接约束。 l_1, l_2 和 l_3 满足 $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ 。抗拉刚度(K_i)和杆件的杨氏模量(E_i)及横

[收稿日期] 2005-07-19

[作者简介] 史 姣(1976—), 女, 山西临汾人, 讲师, 在读硕士, 主要从事水工结构研究。

截面积(A_i)之间满足: $K_i=E_i A_i(i=1,2,3)$ 。若令 $t=2,3$ 。
为各杆件的厚度,则各杆件的宽度 $a_i=A_i/t(i=1,$

表 1 单胞内各杆件的材料和几何参数

Table 1 Material and geometry parameters of the poles in unit cell

编号 Numbering	长度 Length	横截面积 Cross section	材料的杨氏模量 Yang's modulus of the material	抗拉刚度 Extensional rigidity
1	l_1	A_1	E_1	K_1
2	l_2	A_2	E_2	K_2
3	l_3	A_3	E_3	K_3

图 1 中的单胞显示,结构在弹性本构上呈正交各向异性(各向同性是一种特殊情况)。可推测,当单胞中各杆件的材料和几何参数满足某种关系时,具有这种单胞的结构具有各向同性的弹性本构。

1.2 网络结构受力与拟膜的等价受力模型

图 2 和图 3 给出了网络结构和同尺寸的连续体膜之间的力学等效分析方式。这种等效就是要求两者在各自荷载作用下的变形相等,即它们受到相同外力作用时,外力对其做功相等。

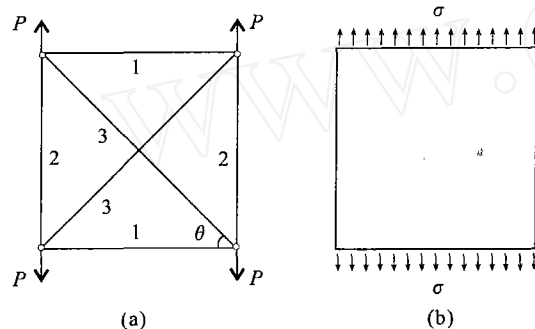


图 2 单轴荷载等效分析

a. 单胞结构受力简图; b. 网络结构拟膜的

受力简图,其中 $\sigma = \frac{2P}{l_1 \cdot t}$

Fig. 2 Equivalent analysis of uni-axial extension

a. Lattice structure; b. Its pseudo-

membrane, where $\sigma = \frac{2P}{l_1 \cdot t}$

设膜在全域内厚度均匀(为等效厚度 t),按能量等效计算网络结构(单胞模型如图 1 所示)的拟膜参数如下:

$$\begin{aligned}
 E_{xm} &= \frac{2E_1 A_1}{l_2 \cdot t(1 - C_1^{-1} \cdot \cos\theta)}, \\
 \nu_{xym} &= \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \frac{\sin\theta}{C_1 - \cos\theta}, \\
 E_{ym} &= \frac{2E_2 A_2}{l_1 \cdot t(1 - C_2^{-1} \cdot \sin\theta)}, \\
 \nu_{xym} &= \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \frac{\cos\theta}{C_2 - \sin\theta}, \\
 G_{xym} &= \frac{\tau}{\gamma_{xy}} = \frac{2E_3 A_3 \sin\theta \cdot \cos\theta}{l_3 \cdot t}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

式中, E_{xm} 和 E_{ym} 分别为拟膜在 X、Y 方向上的杨氏模量; ν_{xym} 、 ν_{xym} 为拟膜的泊松比; G_{xym} 为拟膜的剪切

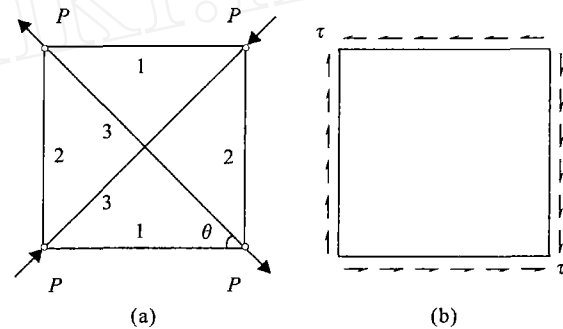


图 3 纯剪切荷载等效分析

a. 单胞结构; b. 网络结构的拟膜,其中 $\tau = \frac{2P}{l_3 \cdot t}$

Fig. 3 Equivalent analysis of pure shear loading

a. Lattice structure; b. Its pseudo-

membrane, where $\tau = \frac{2P}{l_3 \cdot t}$

模量。同时,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left[1 + \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} + \frac{K_1}{K_3} \cdot \frac{1}{\cos^3\theta} \right] \cos\theta, \\
 C_2 &= \left[1 + \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} + \frac{K_2}{K_3} \cdot \frac{1}{\sin^3\theta} \right] \sin\theta.
 \end{aligned} \quad (2)$$

2 网络结构增强相的复合材料弹性参数求解

2.1 复合材料单胞中参数的定义

现假设网络结构固结于各向同性基体材料中形成了(平面)复合材料。取矩形微元(单位厚度)如图 4 所示。

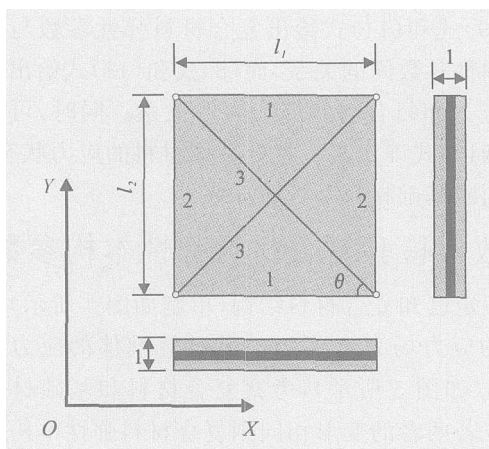


图4 单位厚度的复合材料单元

Fig. 4 Unit cell of the composite material
with unit thickness

图4中的复合材料单元由网格结构嵌入各向同性基体材料形成。复合材料单元中的各种材料及几何参数如下:

1) 基体材料的材料参数及几何参数。

基体材料的杨氏模量和泊松比分别为 E_0, ν_0 ; 单元中基体材料沿 X 方向和 Y 方向上的横截面积平均值分别为 A_{x0}, A_{y0} ; 单元中基体材料的体积率为 $1-\rho$ 。其中 $\rho = \frac{V_L}{V_L + V_B}$, V_L, V_B 分别为复合材料增强相和基体材料的体积。

2) 网格结构拟膜的材料参数及几何参数。

拟膜的弹性本构参数为 $E_{xm}, E_{ym}, G_{xym}, \nu_{xym}, \nu_{xym}$; 单元中网格结构的拟膜沿 X 方向和 Y 方向上的横截面积平均值分别为 A_{xm}, A_{ym} ; 拟膜的体积率为 ρ , 厚度值为 $t = \frac{V_L}{l_1 \cdot l_2} = \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \sum_{i=1}^3 2A_i \cdot l_i$ 。

3) 复合材料的材料参数及几何参数。

复合材料的弹性本构参数为 $E_{xc}, E_{yc}, G_{xyc}, \nu_{xyc}, \nu_{xyc}$; 单元沿 X 方向和 Y 方向上的横截面积平均值分别为 A_{xc}, A_{yc} 。

2.2 复合材料弹性本构参数分析

当复合材料结构受到面内荷载作用时,在这一点处单元上产生的平均应力和应变分量分别为 $\sigma_{xc}, \sigma_{yc}, \tau_c$ 和 $\epsilon_{xc}, \epsilon_{yc}, \gamma_c$ 。实际情况是这些荷载应分别由单元中的基础材料和网格结构来分担。同时,基础材料和网格结构之间会产生相互作用以满足变形协调。因此假定,单元内基础材料上的平均应力和应变分量分别为 $\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_0$ 和 $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \gamma_0$; 网格结构拟膜上的

平均应力和应变分量分别为 $\sigma_{xm}, \sigma_{ym}, \tau_m$ 和 $\epsilon_{xm}, \epsilon_{ym}, \gamma_m$ 。

若结构只受 X 方向和 Y 方向的拉伸(压缩)作用,结构无剪切变形,由变形协调条件可知:

1) X 方向的应变相等,即 $\epsilon_{xc} = \epsilon_{xm} = \epsilon_{x0}$,或者为

$$\frac{\sigma_{xc}}{E_{xc}} - \frac{\nu_{xyc}}{E_{yc}} \cdot \frac{\sigma_{yc}}{E_{yc}} = \frac{\sigma_{xm}}{E_{xm}} - \frac{\nu_{xym}}{E_{ym}} \cdot \frac{\sigma_{ym}}{E_{ym}} = \frac{\sigma_{x0}}{E_0} - \frac{\nu_0}{E_0} \cdot \frac{\sigma_{y0}}{E_0} \quad (3)$$

2) Y 方向的应变相等,即 $\epsilon_{yc} = \epsilon_{ym} = \epsilon_{y0}$,或者为

$$\frac{\sigma_{yc}}{E_{yc}} - \frac{\nu_{xyc}}{E_{xc}} \cdot \frac{\sigma_{xc}}{E_{xc}} = \frac{\sigma_{ym}}{E_{ym}} - \frac{\nu_{xym}}{E_{xm}} \cdot \frac{\sigma_{xm}}{E_{xm}} = \frac{\sigma_{y0}}{E_0} - \frac{\nu_0}{E_0} \cdot \frac{\sigma_{x0}}{E_0} \quad (4)$$

由受力平衡条件知:

1) X 方向基体外力与网格的拟膜外力之和等于复合体所受外力,即

$$\sigma_{x0} \cdot A_{x0} + \sigma_{xm} \cdot A_{xm} = \sigma_{xc} \cdot A_{xc} \quad (5)$$

2) Y 方向基体外力与网格的拟膜外力之和等于复合体所受外力,即

$$\sigma_{y0} \cdot A_{y0} + \sigma_{ym} \cdot A_{ym} = \sigma_{yc} \cdot A_{yc} \quad (6)$$

同时,从图4可知:

$$\frac{A_{ym}}{A_{yc}} = \frac{A_{xm}}{A_{xc}} = \rho,$$

$$\frac{A_{y0}}{A_{yc}} = \frac{A_{x0}}{A_{xc}} = 1 - \rho. \quad (7)$$

整理上式可得

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \end{bmatrix} = D^{-1} \cdot D_m \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xc} \\ \sigma_{yc} \end{bmatrix} \quad (8)$$

因此有

$$D_t = sym\{D_0 \cdot D^{-1} \cdot D_m\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xc}} & -\frac{\nu_{xyc}}{E_{xc}} \\ -\frac{\nu_{xyc}}{E_{yc}} & \frac{1}{E_{yc}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中,(9)式中的“sym”表示对任意方阵 B 取对称阵,即 $sym\{B\} = \frac{1}{2}(B + B^T)$,上标“ T ”是指矩阵取转置。其他方阵为:

$$D = \rho \cdot D_0 + (1 - \rho) \cdot D_m, \quad (10)$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_0} & -\frac{\nu_0}{E_0} \\ -\frac{\nu_0}{E_0} & \frac{1}{E_0} \end{bmatrix},$$

$$D_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xm}} & -\frac{\nu_{xym}}{E_{xm}} \\ -\frac{\nu_{xym}}{E_{xm}} & \frac{1}{E_{ym}} \end{bmatrix}.$$

若结构只受纯剪切作用,剪切变形的协调条件为所有剪应变相等,即 $\gamma_c = \gamma_m = \gamma_0$, 或者为:

$$\frac{\tau_c}{G_{xyc}} = \frac{\tau_m}{G_{xym}} = \frac{\tau_0}{G_0}. \quad (11)$$

基体和网格结构的拟膜所受剪力之和等于复合体所受外剪力,以满足平衡条件,即

$$\tau_0 A_{y0} + \tau_m A_{ym} = \tau_c A_{yc}. \quad (12)$$

其中 A_{y0}, A_{ym}, A_{yc} 满足(7)式。由此可知

$$\tau_0 = \left[(1 - \rho) + \frac{G_{xym}}{G_0} \rho \right]^{-1} \cdot \tau_c, \quad (13)$$

$$G_{xyc} = (1 - \rho) \cdot G_0 + \rho \cdot G_{xym}. \quad (14)$$

(9)式和(14)式给出复合材料弹性参数与两相材料弹性参数间的关系,而(8)式和(13)式给出基体材料应力和复合材料应力间的关系。同时,可按照(8)和(13)式确定某一点处基体材料的应力状态,并粗略判断基础材料是否破坏。

3 数值检验复合材料弹性本构参数

假定已知复合材料结构(单胞如图4所示)中一点的应力场为 σ_{xc} ,按(8)式计算基体的应力场为 σ_{x0}, σ_{y0} (如图5所示),考察复合材料和基础材料的变形。若两者的变形相同则复合材料弹性本构参数表达式正确。

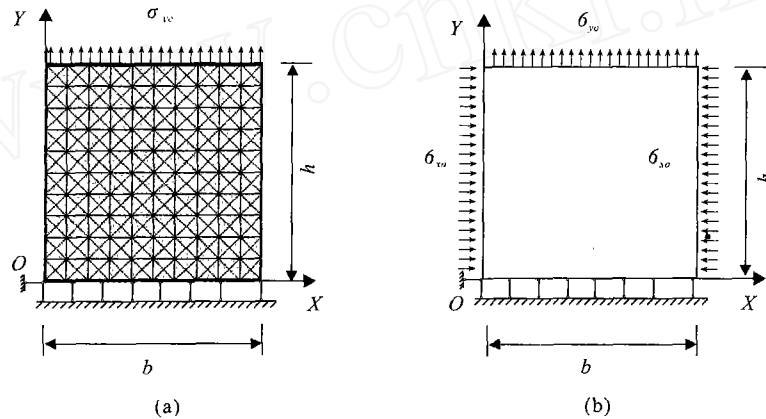


图5 复合材料结构和基体材料结构受力分析简图

a. 复合材料; b. 基体材料

Fig. 5 Analysis of structures

a. Composite material; b. Base material

图5中取单胞几何尺寸为 $1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m}$ 。10个单胞结构固结于基体材料中。网格结构的单胞中各杆件材料参数相同,即 $E_1 = E_2 = E_3 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$, 尺寸如下:

$$A_1 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$A_2 = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$A_3 = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

取基体材料的杨氏模量和泊松比 $E_0 = 2.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\nu_0 = 0.2$, 取网格结构的体积率 $\rho = 0.1$ 和 $\sigma_{xc} = 1.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ 。

按(1)式计算拟膜的面内弹性参数

$$E_{xm} = 4.4354 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$E_{ym} = 6.2727 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\nu_{xym} = 0.4142,$$

$$G_{xym} = 3.4306 \times 10^{10} \text{ Pa}.$$

按(9)和(14)式计算复合材料的面内弹性参数

$$E_{xc} = 2.2701 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$E_{yc} = 2.4938 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\nu_{xyc} = 0.2656,$$

$$G_{xyc} = 1.0931 \times 10^{10} \text{ Pa}.$$

按(8)式计算基体材料的荷载

$$\sigma_{x0} = -0.767 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{y0} = 7.867 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

经计算可知,两个结构的右边沿 X 方向的位移均为 $-1.170 \times 10^{-3} \text{ m}$;两个结构的右边沿 Y 方向的位移均为 $4.01 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。由此可知,通过表达式(9)

和式(14)计算得到的复合材料的弹性参数正确。

4 结 语

本文通过分析具有正交一对角铰接型单胞的二维平面网格结构,提出了拟膜分析法。分析的重点在于强调:第一,若整个结构和单胞的尺度差异较大,

无论单胞的尺寸如何,拟膜法均可使用;第二,网格结构和连续体可相互比拟;第三,将网格结构嵌入各向同性基体材料中形成二维复合材料,得出复合材料的弹性本构;第四,可通过复合材料的应力场粗略计算出基体材料的应力场,用以判断基础材料是否破坏。

[参考文献]

- [1] Wang Q. Effective in-plane stiffness and bending rigidity of armchair and zigzag carbon nanotubes[J]. Int J Solids and Struct, 2004, 41(20):5451-5461.
- [2] Masters I G, Evans K E. Models for the elastic deformation of honeycombs[J]. Composite Structures, 1996, 35(4):403-422.
- [3] Wang A J, McDowell D L. Effects of defects on in-plane properties of periodic metal honeycombs[J]. Int J Mechanical Sciences, 2003, 45(11):1799-1813.
- [4] Tollenaere H, Caillerie D. Continuous modeling of lattice structures by homogenization[J]. Advances in Engng Software, 1998, 29(7-9):699-705.
- [5] 董石麟, 夏亨熹. 正交正放类网架结构的拟板(夹层板)分析法(上、下)[J]. 建筑结构学报, 1982, 3(2):14-25; 1982, 3(3):14-22.
- [6] 董石麟. 新型网壳结构的应用与发展[J]. 工程力学, 1996(增刊):78-87.
- [7] 董石麟. 我国大跨度空间钢结构的发展与展望[J]. 空间结构, 2000, 6(2):3-13.
- [8] Vasiliev V V, Barynin V A, Rasin A F. Anisogrid lattice structures-survey of development and application[J]. Composite Structures, 2001, 54(3):361-370.
- [9] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1990.
- [10] 王勖成, 邵 敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京:清华大学出版社, 1996.

Analysis of 2-D lattice structure by pseudo-membrane method

SHI Jiao¹, WANG Zheng-zhong¹, CAI Kun²

(1 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Pseudo-membrane (PMB) method is presented in this paper to deal with two-dimensional (2-D) elastic structural problems. Based on the energy equivalence rule, a 2-D LS is considered as a continuum membrane which is called Pseudo-Membrane. A unit cell model of orthogonal-diagonal lattice structure (LS) is set up. And the membrane's elastic constitutive parameters (ECPs) are expressed by the geometry and material parameters of the unit cell. Then a composite material is formed by embedding such lattice structure in isotropic base material. Finally the ECPs of the 2-D composite material are given as well and are verified numerically.

Key words: lattice structure; pseudo-membrane method; unit cell; composite material; elastic constitutive parameter