# 一类线性不确定定常时滞系统的鲁棒镇定*

张慧凤[1a,2], 王乃信[1a], 周敏姑[1b]

(1 西北农林科技大学 a 生命科学学院, b 机械与电子工程学院, 陕西 杨凌 712100;
2 烟台师范学院 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

[摘　要] 研究了一类带有非线性扰动的线性不确定时滞系统的鲁棒镇定问题。在闭环系统的稳定性结果基础上, 给出了时滞系统的鲁棒控制策略, 推导出控制律存在的一个充分条件, 该条件被进一步等价地转化为一个线性矩阵不等式的可解性问题。根据 Lyapunov 稳定性原理所设计的控制器确保了闭环系统渐近稳定。最后, 通过数值例子说明了此方法的正确性与有效性。

[关键词] 时滞系统; 状态反馈; 鲁棒镇定; 时滞依赖

[中图分类号] TP273　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1671-9387(2006)01-0133-04

时滞和不确定现象普遍存在于实际应用的控制系统中, 并且常常是导致系统不稳定的重要原因, 此问题已得到国内外学者的广泛关注, 并取得了许多研究成果[1-5]。同时, 在时滞系统中经常存在的非线性扰动现象, 大大影响了系统的品质[3,6-7]。时滞系统的稳定性和鲁棒镇定的判据有时滞无关和时滞相关两种, 由于时滞无关条件缺乏有关时滞的详细信息, 其结果必然会带来保守性, 且在系统滞后较小的情况下显得更为明显, 因此研究时滞相关的稳定性和鲁棒镇定, 就显得至关重要。然而, 在当前相关文献中, 基于线性矩阵不等式(LMI), 针对带有非线性扰动和范数有界不确定参数的时滞系统时滞相关稳定性和鲁棒镇定的研究尚不多见。

本研究针对一类同时具有非线性扰动和范数有界不确定参数的定常时滞系统, 在文献[3]的基础上, 研究了鲁棒镇定问题, 与以往的结果相比, 本研究所设计的控制器具有更好的控制精度。

## 1　系统描述与准备知识

考虑下面的不确定定常时滞系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &(A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + \\ &(A_1 + \Delta A_1(t))x(t-\tau) + \\ &(B + \Delta B)u(t) + f(t, x(t), x(t-\tau)) \end{aligned} \qquad (1)$$

式中, $x(t)\in R^n$, 为状态向量; $A_0, A_1, B\in R^{n\times n}$, 为常矩阵; $\tau\in R_+$, 为未知有界常时滞; $\Delta A_k(t) = D_k F_k(t) E_k (k=0, 1)$, 其中 $D_k, F_k(t), E_k (k=0, 1)$ 为适当维数的实矩阵; $\Delta B(t) = D_0 F_0(t) E_b$, 为不确定项; $F_k(t) F_k^T(t) \le I (k=0, 1)$, 其中 $I$ 为单位矩阵, $f(t, x(t), x(t-\tau))$ 为有界非线性扰动。

$$\begin{aligned}&\| f(t, x(t), x(t-\tau)) \| \le \\ &\beta_0 \| x(t) \| + \beta_1 \| x(t-\tau) \| \end{aligned} \qquad (2)$$

式中, $\beta_0 \ge 0$, $\beta_1 \ge 0$, 均为常数, 对任意向量 $x\in R^n$, $\| x \| = \sqrt{x^T x}$。

**引理 1**　对于任意 $x, y\in R^n$ 和任意正定矩阵 $P\in R^{n\times n}$, 有

$$2x^T y \le x^T P^{-1} x + y^T P y$$

**引理 2**　假设 $A, D, E, F$ 是适当维数的实矩阵, 且满足 $F^T(t)F(t) < I$, 有

a) 对于任意 $\epsilon > 0$, $DFE + E^T F^T D^T \le \epsilon^{-1} DD^T + \epsilon E^T E$

b) 对于任意正定矩阵 $P$ 及参数 $\epsilon > 0$, 如果 $\epsilon I - EPE^T > 0$, 则有

$$\begin{aligned}&(A + DFE)P(A + DFE)^T \le APA^T + \\ &APE^T(\epsilon I - EPE^T)^{-1}EPA^T + \epsilon DD^T\end{aligned}$$

c) 对于任意正定矩阵 $P$ 及参数 $\epsilon > 0$, 如果 $P - \epsilon DD^T > 0$, 则有

$$\begin{aligned}&(A + DFE)^T P^{-1}(A + DFE) \le \\ &A^T(P - \epsilon DD^T)^{-1}A + \epsilon^{-1}E^T E\end{aligned}$$

针对线性不确定时滞系统(1)和(2), 为了分析其鲁棒镇定, 需要对该系统做出稳定性分析, 文献[3]已经给出稳定性分析结果。这里首先引用稳定性

* [收稿日期] 2005-05-31
[作者简介] 张慧凤(1975- ), 女, 山东东阿人, 在读硕士, 主要从事复杂系统、非线性时滞系统研究。
[通讯作者] 王乃信(1942- ), 男, 陕西户县人, 教授, 博士生导师, 主要从事数学和计算机应用研究。

分析的结果及其证明方法,然后进行鲁棒镇定的研究。

## 2 时滞相关稳定性分析

考虑系统(1)的自治系统(即 $u(t)=0$)有如下结果:

**定理 1**[3]: 对于正数 $\tau_M>0$,如果存在标量 $\epsilon_k>0$, $\delta_k>0$ $(k=0,1)$ 及对称正定矩阵 $P\in R^{n\times n}$, $U\in R^{n\times n}$ 和 $G_k\in R^{n\times n}$ $(k=0,1,2)$,使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} M & H_1 & H_2 & H_3 & P & PD_0 & PD_1 \\ H_1^T & -Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2^T & 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_3^T & 0 & 0 & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & -\delta I & 0 & 0 \\ D_0^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_0 I & 0 \\ D_1^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}<0, \tag{3}$$

式中,$M=P(A_0+A_1)+(A_0+A_1)^TP+\sum_{k=0}^{k=1}(\epsilon_kE_k^TE_k+\tau_M\alpha_kE_k^TE_k+\tau_MA_k^TG_kA_k)+2(\beta_0^2+\beta_1^2)(\tau_M\delta_0+\delta_1)I$; $H_1=[PA_1\ \ PA_1\ \ PA_1]$; $H_2=[A_0^TG_0D_0\ \ A_1^TG_1D_1]$; $H_3=[PD_1\ \ PD_1\ \ PD_1]$; $Q_1=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}G_0-\tau_M^{-1}\gamma_0E_1^TE_1,\ \tau_M^{-1}G_1-\tau_M^{-1}\gamma_1E_1^TE_1,\ \tau_M^{-1}\delta_0I-\tau_M^{-1}\gamma_2E_1^TE_1]$; $Q_2=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}\alpha_0I-\tau_M^{-1}D_0^TG_0D_0,\ \tau_M^{-1}\alpha_1I-\tau_M^{-1}D_1^TG_1D_1]$; $Q_3=\mathrm{diag}[\tau_m^{-1}\gamma_0I,\ \tau_M^{-1}\gamma_1I,\ \tau_M^{-1}\gamma_2I]$。

则对于任意的 $\tau\in[0,\tau_M]$,系统(1)鲁棒稳定。

**证明**: 记 $f(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))$, $\bar{A}_0=\bar{A}_0(t)=A_0+\Delta A_0(t)$, $\bar{A}_1=\bar{A}_1(t)=A_1+\Delta A_1(t)$,将系统(1)写成如下形式:

$$\dot{x}(t)=(\bar{A}_0+\bar{A}_1)x(t)-\bar{A}_1\int_{-\tau}^{0}\dot{x}(t+s)\mathrm{d}s+f(t)=$$
$$(\bar{A}_0+\bar{A}_1)x(t)-\bar{A}_1\int_{-\tau}^{0}\big[\bar{A}_0(t+s)x(t+s)+\bar{A}_1(t+s)x(t+s-\tau)+f(t+s)\big]\mathrm{d}s+f(t) \tag{4}$$

取 Lyapunov 泛函,

$$V(x(t),t)=x^T(t)Px(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t}x^T(\theta)\bar{A}_0^T(\theta)G_0\bar{A}_0(\theta)x(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t}\delta_0f^T(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-\tau}^{0}\int_{t-\tau+s}^{t}x^T(\theta)\bar{A}_1^T(\theta+\tau)G_1\bar{A}_1(\theta+\tau)x(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}2\beta_1^2(\tau\delta_0+\delta_1)x^T(s)x(s)\mathrm{d}s。$$

沿系统(1)的轨迹对 $V(x(t),t)$ 求导数,并由式(2)、引理1及引理2得:

$$\dot{V}(x(t),t)\le x^T(t)W(\tau)x(t),$$

其中:

$$\begin{aligned}W(\tau)=&P(A_0+A_1)+(A_0+A_1)^TP+\sum_{k=0}^{1}(\epsilon_k^{-1}PD_kD_k^TP+\epsilon_kE_k^TE_k)+\sum_{k=0}^{1}\tau PA_1(G_k-\gamma_kE_1^TE_1)^{-1}A_1^TP+\\&\tau\gamma_k^{-1}PD_1D_1^TP+\sum_{k=0}^{1}\tau A_k^TG_kA_k+\tau A_k^TG_kD_k(\alpha_kI-D_k^TG_kD_k)^{-1}D_k^TG_kA_k+\tau\alpha_kE_k^TE_k+\\&\tau\gamma_2^{-1}PD_1D_1^TP+\tau PA_1(\delta_0I-\gamma_2E_1^TE_1)^{-1}A_1^TP+\delta_1^{-1}PP+2(\beta_0^2+\beta_1^2)(\tau\delta_0+\delta_1)I\end{aligned} \tag{5}$$

式(5)中,标量 $\gamma_k>0$ $(k=0,1,2)$, $\alpha_k>0$ $(k=0,1)$, $\delta_0>0$ 及对称正定矩阵 $G_k$ $(k=0,1)$ 满足:

$$G_k-\gamma_kE_1^TE_1>0,\ \alpha_kI-D_k^TG_kD_k>0\ (k=0,1),$$
$$\delta_0I-\gamma_2E_1^TE_1>0 \tag{6}$$

应用 Schur 补原理,知式(3)意味着式(6)及 $W(\tau_M)<0$,由式(5)易知对于任意的 $\tau\in[0,\tau_M]$,有 $W(\tau)<W(\tau_M)$,故 $\dot{V}(x(t),t)<0$。证毕。

针对线性不确定时滞系统(1),本研究以 LMI 的形式给出一个时滞依赖鲁棒可镇定的充分条件及相应的控制器设计方法。

## 3 状态反馈镇定

根据式(5),对 $W(\tau)<0$ 左右分别乘以矩阵 $P^{-1}$,为了简便起见,令 $P^{-1}=X$ 得:

$$\begin{aligned}XW(\tau)X=&(A_0+A_1)X+X(A_0+A_1)^T+\sum_{k=0}^{1}(\epsilon_k^{-1}D_kD_k^T+\epsilon_kXE_k^TE_kX)+\\&\sum_{k=0}^{1}\tau A_1(G_k-\gamma_kE_1^TE_1)^{-1}A_1^T+\tau\gamma_k^{-1}D_1D_1^T+\sum_{k=0}^{1}\tau XA_k^TG_kA_kX+\tau XA_k^TG_kD_k(\alpha_kI-D_k^TG_kD_k)^{-1}D_k^TG_kA_kX+\\&\tau\alpha_kXE_k^TE_kX+\tau\gamma_2^{-1}D_1D_1^T+\tau A_1(\delta_0I-\gamma_2E_1^TE_1)^{-1}A_1^T+\delta_1^{-1}I+2(\beta_0^2+\beta_1^2)(\tau\delta_0+\delta_1)XX<0\end{aligned} \tag{7}$$

利用 Schur 补引理有:

$$\begin{bmatrix} M & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 \\ H_1^T & -Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2^T & 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_3^T & 0 & 0 & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ H_4^T & 0 & 0 & 0 & -Q_4 & 0 & 0 \\ H_5^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_5 & 0 \\ H_6^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_6 \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

**式中**, $M=(A_0+A_1)X+X(A_0+A_1)^T+\delta_1^{-1}I+\sum_{k=0}^{1}\epsilon_k^{-1}D_kD_k^T$; $H_1=[XE_0^T\ \ XE_1^T\ \ XE_0^T\ \ XE_1^T]$; $H_2=[A_1\ A_1\ A_1]$; $H_3=[XA_0^TG_0D_0\ \ XA_1^TG_1D_1]$; $H_4=[D_1\ D_1\ D_1]$; $H_5=[XA_0^T\ \ XA_1^T]$; $H_6=[X\ \ X]$; $Q_1=\mathrm{diag}[\epsilon_0^{-1}I,\ \epsilon_1^{-1}I,\ \tau_M^{-1}\alpha_0^{-1}I,\ \tau_M^{-1}\alpha_1^{-1}I]$; $Q_2=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}G_0-\tau_M^{-1}\gamma_0E_1^TE_1,\ \tau_M^{-1}G_1-\tau_M^{-1}\gamma_1E_1^TE_1,\ \tau_M^{-1}\delta I-\tau_M^{-1}\gamma_2E_1^TE_1]$; $Q_3=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}\alpha_0I-\tau_M^{-1}D_0^TG_0D_0,\ \tau_M^{-1}\alpha_1I-\tau_M^{-1}D_1^TG_1D_1]$; $Q_4=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}\gamma_0I,\ \tau_M^{-1}\gamma_1I,\ \tau_M^{-1}\gamma_2I]$; $Q_5=\mathrm{diag}[\tau_M^{-1}G_0^{-1},\ \tau_M^{-1}G_1^{-1}]$; $Q_6=\mathrm{diag}[(2(\beta_0^2+\beta_1^2)\tau_M\delta_0)^{-1}I,\ (2(\beta_0^2+\beta_1^2)\tau_M\delta_1)^{-1}I]$。

**定理 2**: **对于正数** $\tau_M>0$, **如果存在标量** $\epsilon_k>0$, $\delta_k>0\ (k=0,1)$ **及对称正定矩阵** $X\in R^{n\times n}$, $Y\in R^{n\times n}$ **及** $G_k\in R^{n\times n}\ (k=0,1,2)$, **使得下式成立**:

$$\begin{bmatrix} M & \hat H_1 & \hat H_2 & \hat H_3 & \hat H_4 & \hat H_5 & \hat H_6 \\ \hat H_1^T & -\hat Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat H_2^T & 0 & -\hat Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat H_3^T & 0 & 0 & -\hat Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hat H_4^T & 0 & 0 & 0 & -\hat Q_4 & 0 & 0 \\ \hat H_5^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat Q_5 & 0 \\ \hat H_6^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat Q_6 \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

**式中**, $M_c=(A_0+A_1)X+X(A_0+A_1)^T+BY+Y^TB^T+\delta_1^{-1}I+\sum_{k=0}^{1}\epsilon_k^{-1}D_kD_k^T$; $\hat H_1=[XE_0^T+Y^TE_b^T\ \ XE_1^T\ \ XE_0^T+Y^TE_b^T\ \ XE_1^T]$; $\hat H_2=[A_1\ A_1\ A_1]$; $\hat H_3=[(XA_0^T+Y^TB^T)G_0D_0\ \ XA_1^TG_1D_1]$; $\hat H_4=[D_1\ D_1\ D_1]$; $\hat H_5=[XA_0^T+Y^TB^T\ \ XA_1^T]$; $\hat H_6=[X\ \ X]$。**式中的** $\hat Q_1,\hat Q_2,\hat Q_3,\hat Q_4,\hat Q_5,\hat Q_6$ **等同于定理 1 中的** $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6$, **则系统**(1)**鲁棒可镇定。另外, 鲁棒镇定控制律为** $u(t)=YX^{-1}x(t)$。

**证明**: **引入控制律** $u(t)=Kx(t)$ **的闭环系统, 式**(1)**可变为**:

$$\dot x(t)=(A_c+D_0F_0(t)E_c)x(t)+(A_1+D_1F_1(t)E_1)x(t-\tau)+f(t,x(t),x(t-\tau)) \tag{10}$$

**式中**, $A_c=A_0+BK$, $E_c=E_0+E_bK$。**对于闭环系统, 式**(10)**运用定理** 1, **并令** $Y=KX$ **得定理** 2。

## 4　数值例子

**例**: **考虑系统**(1), **其中**:

$$A_0=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D_0=\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ F_0=F_1=\begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix},$$

$$E_0=E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \beta_0=0.3,\ \beta_1=0.3$$

**应用** MATLAB **的** LMI **工具箱, 根据定理** 2, **得到**:

$$P=\begin{bmatrix} 45.3339 & -2.6595 \\ -2.6595 & 24.8071 \end{bmatrix},\ G_0=\begin{bmatrix} 50.7656 & 9.1605 \\ 9.1605 & 25.2312 \end{bmatrix},$$

$$G_1=\begin{bmatrix} 64.8401 & 12.3084 \\ 12.3084 & 22.7025 \end{bmatrix},\ K=[-12.5634\ \ -18.2431]$$

**则控制器为** $u(t)=[-12.5634\ \ -18.2431]x(t)$。**此时, 系统的状态响应曲线如图** 1 **所示。**

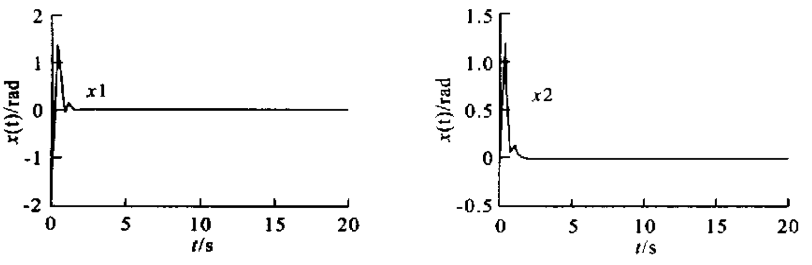


图 1　系统状态响应曲线

Fig. 1　Trajectory curve of system state

由图 1 可见, 在控制作用下, 闭环系统的状态 $x_1$, $x_2$ 分别渐近稳定, 从而整个闭环系统渐近稳定。

## 5 结 论

作者研究了一类带非线性干扰的线性不确定定常时滞系统,时滞依赖型鲁棒控制器的设计问题。在鲁棒稳定性分析的基础上,基于Lyapunov原理,对该系统的鲁棒镇定控制器的设计问题进行了探讨,得到了与时滞相关的使其系统鲁棒稳定的线性状态反馈控制器。关于带非线性干扰的线性不确定时变时滞系统的稳定性问题,有待于进一步研究。

### [参考文献]


[1] Xi L, De S, Carlos E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay[J]. Automatica, 1997, 33(9): 1657-1662.

[2] Lee C H, SU T H, Kung F C. On the robustness of stability for uncertain time- delay systems[J]. Int J Systems Sci, 1995, 26(2): 457-465.

[3] 彭达洲,胥布工. 带非线性扰动的不确定时滞系统的鲁棒稳定性[J]. 广东工业大学学报, 2004, 21(1): 23-25.

[4] XU B. Delay-dependent stability for linear uncertain time-delay systems[J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(4): 426-431.

[5] XU B. Stability robustness bounds for linear systems with multiple time varying delayed perturbations[J]. Int J Systems Sci, 1997, 28(12): 1311-1317.

[6] Su T J, Huang C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems[J]. IEEE Trans A C, 1992, 237(10): 1656-1659.

[7] 陈尔彦,徐世杰. 时滞不确定系统的时滞相关稳定性[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2001, 33(6): 819-821.


# Robust stabilization for linear uncertain time-delay systems with nonlinear perturbation


**ZHANG Hui-feng**[1a, 2], **WANG Nai-xin**[1a], **ZHOU Min-gu**[1b]

(1 *a College of Life Sciences, b College of Mechanic Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*;
2 *College of Life Math and Information, Yantai Normal University, Yantai, Shandong* 264025, *China*)



**Abstract**: The problem of robust stabilization for linear uncertain time-delay systems with nonlinear perturbation is reviewed. Based on Lyapunov stability theory, the delay dependent stabilization criteria for the system is developed. Robust controller is given by analyzing the stability of closed-loop system. The sufficient condition for the existence of controller is deduced. Then, the condition is further equivalent to the solvability of certain linear matrix inequality (LMI). Robust controller is given to guarantee stability of closed-loop system. Finally, an example is employed to illustrate the validity and effectiveness of the proposed method.



**Key words**: time-delay system; state feedback; robust stabilization; delay dependent