

非线性渗流区域井流问题渗流速度的分区研究^{*}

刘元会, 常安定

(长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

[摘 要] 为了精确求解两种流态并存区域上井流问题的渗流速度, 在非线性渗流区域内对渗流规律中的非线性指数进行了分区研究, 通过对水均衡方程用 Boltzmann 变换进行求解, 推导出了线性与非线性渗流区域内渗流速度的解析表达式。

[关键词] 线性流; 非线性流; 渗流区域; 渗流速度

[中图分类号] O 357. 3

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2005)08-0157-04

对线性与非线性两种流态并存区域上井流问题的渗流速度, 文献[1~3]中就简单的区域划分和特殊的非线性渗流规律已经作了研究, 取得了很好的结果。但是, 渗流规律的特殊性致使其结果的应用有很大的局限性, 区域的简单划分使得渗流模型误差增大, 进而影响了整个渗流区域上解析解的精度。为了更切合渗流实际, 更准确地描述地下水的渗流规律, 更精确地求解井流问题的渗流速度, 有必要探索新的思路和方法, 不断丰富和发展地下水渗流理论。本研究就一般非线性渗流规律, 对非线性渗流区域进行了分区研究, 推导出了整个渗流区域上井流问题渗流速度的解析表达式。

1 基本方程

在其他条件均满足泰斯假设条件的承压含水层的完整井中, 以定流量 Q 抽水, 取抽水井位置为柱面坐标系的坐标原点, 含水层中的地下水流为向抽水井主孔的径向水平流动。在上述条件下, 如图1所示, 整个渗流区域可以划分为线性流区域($r > r_c$)和非线性流区域($0 < r \leq r_c$), 其中, r 表示渗流柱面到主井的径向距离, r_c 为临界半径, 即线性与非线性渗流区域的分界面到主井的径向距离^[4~6], 其值可以通过雷诺数来确定^[3]。

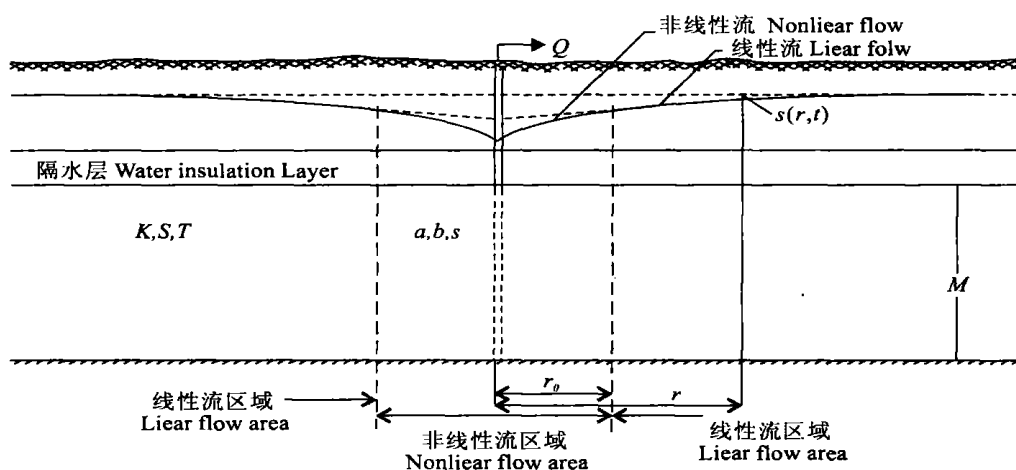


图1 线性与非线性渗流区域并存的井流问题示意图

Fig 1 Sketch map showing the linear and the nonlinear flow area in a well problem

[收稿日期] 2004-12-21

[基金项目] 长安大学科技发展基金项目(0305-1001)

[作者简介] 刘元会(1964-), 男, 陕西乾县人, 副教授, 硕士, 主要从事地下水渗流理论研究。

在线性流区域内, 渗流服从达西线性渗流定律, 有

$$J = \frac{1}{k} v_d, \quad (1)$$

式中, J 为水力坡度; k 为渗透系数; v_d 为线性渗流区域内的渗流速度。

在非线性区域内, 渗流服从 Forchheimer 非线性渗流规律, 有

$$J = av_f + bv_f^n, \quad (2)$$

式中, a, b 为常数; v_f 为非线性渗流区域内的渗流速度。

在抽水开始后的任一微小时段 Δt 内, 含水层中距抽水井距离为 r 的圆柱侧表面上, 水量平衡方程为

$$\Delta t [Q(r, t) - Q(r + \Delta r, t)] = 2\pi r \Delta r \mu^* [s(r, t + \Delta t) - s(r, t)], \quad (3)$$

式中, $Q(r, t), Q(r + \Delta r, t)$ 分别为 t 时刻通过半径 r 和 $r + \Delta r$ 的圆柱体侧表面的流量, $\Delta r < r$; $s(r, t), S(r, t + \Delta t)$ 分别为距离 r 处, 时间 t 与 $t + \Delta t$ 时刻的水头降深; μ^* 为含水层的释水系数, 其物理意义为单位水平面积上, 含水层的水头下降 1 个单位时 M 厚度上所能释放的水量。当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta r \rightarrow 0$ 时, 式(3)可以写成

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial r} = -2\pi r \mu^* \frac{\partial s(r, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

另外, 在半径为 r 的圆柱侧表面上, 单位时间内通过的流量还可以表示为

$$Q(r, t) = 2\pi M v(r, t), \quad (5)$$

式中, M 为含水层厚度; $v(r, t)$ 为 r 处 t 时刻的渗透速度。将(5)式代入(4)式可得

$$\frac{\partial v(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} v(r, t) = -\frac{\mu^*}{M} \frac{\partial s(r, t)}{\partial t}. \quad (6)$$

方程(6)表示整个渗流区域内渗流速度和水头降深间的一般关系。本文将依据微分方程(6)来推导、确定线性与非线性渗流区域上渗流速度的表达式。

2 解析解的推导

在实际的渗流问题中, 整个渗流区域内径向距离不同的过水柱面上, 非线性区域内的渗流规律 $J = av_f + bv_f^n$ 中的系数 a, b 及非线性指数 n 都是 r 的函数。为了便于数学推导, 假定系数 a, b 均为常数。本文对非线性渗流区域作更细小的划分, 假定在不同的小区域上非线性指数取不同的常数, 然后在每一个小区域上对相应的渗流方程分别进行求解, 即可得到每一个小区域上的渗流速度。

2.1 非线性渗流区域内的渗流速度

把非线性区域 $0 < r \leq r_c$ 划分为 N 个子区域, 当径向距离 $0 < r \leq r_1$ 时, 非线性指数为 n_1 ; 当径向距离 $r_1 < r \leq r_2$ 时, 非线性指数为 n_2 ; 当径向距离 $r_2 < r \leq r_3$ 时, 非线性指数为 n_3 ; 依次类推, 当径向距离 $r_{N-1} < r \leq r_c$ 时, 非线性指数为 n_N ; 当 $r > r_c$ 时, 是线性流区域, 仍按线性渗流规律计算。这里 $1 \leq n_i \leq 2, n_i \geq n_{i+1}, i = 1, 2, 3, \dots, N$ 。

在非线性流区域内为 Forchheimer 流, 则式(2)可以写成

$$-\frac{\partial s_f(r, t)}{\partial r} = av_f(r, t) + bv_f^n(r, t), \quad (7)$$

式中, f 为非线性流, $s_f(r, t)$ 为非线性渗流区域内的水头降深。引入 Boltzmann 变换, 即

$$\eta = \frac{r}{2t^{\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

则式(6), (7)分别变为

$$\frac{dv_f(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{\eta} v_f(\eta) = \frac{\mu^*}{M} \frac{\eta}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{ds_f(\eta)}{d\eta}, \quad (9)$$

$$\frac{ds_f(\eta)}{d\eta} = -2t^{\frac{1}{2}} [av_f(\eta) + bv_f^n(\eta)]. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式, 消去 $\frac{ds_f(\eta)}{d\eta}$ 项后, 可得

$$\frac{1}{\eta} \frac{dv_f(\eta)}{d\eta} + \left(\frac{2a\mu^*}{M} + \frac{1}{\eta}\right) v_f(\eta) + \frac{2b\mu^*}{M} v_f^n(\eta) = 0. \quad (11)$$

该方程是一个 Bernoulli 方程, 为了求解, 引入变量代换

$$z = v_f^{1-n}(\eta), \quad (12)$$

则方程(11)变为

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{d\eta} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{2a\mu^*}{M}\right) z = -\frac{2b\mu^*}{M} \eta. \quad (13)$$

该方程是一个以 z 为函数, 以 η 为自变量的一阶线性非齐次微分方程, 其通解为

$$z = \eta^{-1} \cdot e^{\frac{a\mu^*(n-1)}{M}\eta^2} \left[C_1 + \frac{2b\mu^*(n-1)}{M} \int \frac{1}{\eta^2} e^{-\frac{a\mu^*(n-1)}{M}\eta^2} d\eta \right], \quad (14)$$

式中, C_1 为积分常量。考虑到(12)式, 则式(14)可以写成

$$v_f^{1-n}(\eta) = \eta^{-1} \cdot e^{\frac{a\mu^*(n-1)}{M}\eta^2} \left[C_1 + \frac{2b\mu^*(n-1)}{M} \int \frac{1}{\eta^2} e^{-\frac{a\mu^*(n-1)}{M}\eta^2} d\eta \right].$$

在第 p 个区域 $r_{p-1} < r \leq r_p$ ($p = 1, 2, 3, \dots, N$) 内,

上式即为

$$v_{f_p}^{1-n_p}(\eta) = \eta^{p-1} \cdot e^{\frac{a\mu^*(n_p-1)}{M}\eta^2} [c_p + \frac{2b\mu^*(n_p-1)}{M} \int_{\eta_{p-1}}^{\eta} \frac{1}{\eta^{p-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_p-1)}{M}\eta^2} d\eta], \quad (15)$$

式中, c_p ($p = 1, 2, 3, \dots, N$) 为积分常量; $\eta_{p-1} =$

$$\frac{r_{p-1}}{2t^{\frac{1}{2}}}$$

为了确定积分常数 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N$, 需要用到渗流模型的内边界条件, 即

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi M r v_f(r, t) = Q_0. \quad (16)$$

同时也要考虑渗流速度的连续性条件, 即

$$\begin{aligned} v_{f_1}(r_1) &= v_{f_2}(r_1), \\ v_{f_2}(r_2) &= v_{f_3}(r_2), \\ v_{f_3}(r_3) &= v_{f_4}(r_3), \\ &\vdots \\ v_{f_{N-1}}(r_{N-1}) &= v_{f_N}(r_{N-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

由(16)式和(17)式可得

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)}, \\ c_2 &= c_1 + \frac{2b\mu^*(n_1-1)}{M} \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{1}{\eta^{1-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_1-1)}{M}\eta^2} d\eta \\ c_3 &= c_2 + \frac{2b\mu^*(n_2-1)}{M} \int_{\eta_2}^{\eta} \frac{1}{\eta^{2-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_2-1)}{M}\eta^2} d\eta \\ &\vdots \\ c_p &= c_{p-1} + \frac{2b\mu^*(n_{p-1}-1)}{M} \int_{\eta_{p-2}}^{\eta} \frac{1}{\eta^{p-1-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_{p-1}-1)}{M}\eta^2} d\eta \end{aligned} \quad (18)$$

式中, $p = 2, 3, 4, \dots, N$; $\eta_p = \frac{r_p}{2t^{\frac{1}{2}}}$

c_p 可用 c_1 表示为

$$c_p = c_1 + \frac{2b\mu^*}{M} \sum_{i=2}^p (n_{i-1} - 1) \int_{\eta_{i-2}}^{\eta} \frac{1}{\eta^{i-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_{i-1}-1)}{M}\eta^2} d\eta \quad (20)$$

将(20)式代入(15)式并整理得

$$v_{f_p} = \frac{e^{-\frac{a\mu^*\eta^2}{M}}}{\eta} \left[\left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)} + \frac{2b\mu^*}{M} \right]$$

$$\sum_{i=1}^p (n_i - 1) \int_{\eta_{i-1}}^{\eta} \frac{1}{\eta^{i-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_i-1)}{M}\eta^2} d\eta \cdot \frac{1}{\eta^{p-1}}. \quad (21)$$

替换成 r, t 的函数后为

$$\begin{aligned} v_{f_p}(r, t) &= \frac{2t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a\mu^* r^2}{4Mt}}}{r} \left[\left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)} + \right. \\ &\left. \frac{2b\mu^*}{M} \sum_{i=1}^p (n_i - 1) \int_{\frac{r_{p-1}}{2t^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{r}{2t^{\frac{1}{2}}}} \frac{1}{\eta^{i-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_i-1)}{M}\eta^2} d\eta \right] \cdot \frac{1}{\eta^{p-1}}. \end{aligned} \quad (22)$$

设 $F(r, t) = \left[\left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)} + \frac{2b\mu^*}{M} \left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)} \sum_{i=1}^p (n_i - 1) \int_{\frac{r_{p-1}}{2t^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{r}{2t^{\frac{1}{2}}}} \frac{1}{\eta^{i-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_i-1)}{M}\eta^2} d\eta \right] \cdot \frac{1}{\eta^{p-1}}$, 则(22)式可以写成

$$v_{f_p}(r, t) = \frac{Q}{2\pi M r} \cdot F(r, t) \cdot e^{-\frac{a\mu^* r^2}{4Mt}}. \quad (23)$$

式(23)即为非线性区域各个子分区内渗流速度的表达式。

2.2 线性流区域内的渗流速度

在线性流区域内 ($r > r_c$), 式(7)所表示的线性渗流关系可以写成

$$v_d(r, t) = -k \frac{\partial s_d(r, t)}{\partial r}, \quad (24)$$

式中, d 为达西线性流; $s_d(r, t)$ 为线性渗流区域内的水头降深。在 Boltzmann 变换下, (24)式与(6)式分别可以写成

$$\frac{ds_d(\eta)}{d\eta} = -2t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} v_d(\eta), \quad (25)$$

$$\text{与} \quad \frac{dv_d(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{\eta} v_d(\eta) = \frac{\mu^*}{M} \cdot \frac{\eta}{t^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{ds_d(\eta)}{d\eta}. \quad (26)$$

将(25)式代入(26)式, 消去 $\frac{ds_d(\eta)}{d\eta}$ 后可得

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{dv_d(\eta)}{d\eta} + \left(2\frac{\mu^*}{T} + \frac{1}{\eta}\right) v_d(\eta) = 0, \quad (27)$$

式中, $T = kM$, 为含水层的导水系数。显然, (27)式是一阶齐次线性微分方程, 其通解为

$$v_d(\eta) = c_{N+1} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot e^{-\frac{\mu^*}{T}\eta^2}. \quad (28)$$

式中, c_{N+1} 为积分常数。

利用渗流速度的连续性条件

$$v_{f_N}(r_c) = v_d(r_c), \quad (29)$$

从(21)式(取 $p = N$)及(28)式可求出

$$\begin{aligned} c_{N+1} &= e^{-\frac{a\mu^* r_c^2}{4Mt}} \cdot e^{\frac{\mu^* r_c^2}{4T}} \cdot \left[\left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(n_1-1)} + \frac{2b\mu^*}{M} \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^N (n_i - 1) \int_{\eta_{i-1}}^{\eta} \frac{1}{\eta^{i-2}} e^{-\frac{a\mu^*(n_i-1)}{M}\eta^2} d\eta \right] \cdot \frac{1}{\eta^{N-1}}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{设 } F(r_c, t) = \left[\left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}} \right)^{-n_1} + \frac{2b\mu^*}{M} \left(\frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N (n_i - 1) \int_{r_{i-1}}^r \frac{1}{\eta r^2} e^{-\frac{a\mu^* (n_i - 1)}{M} \eta^2} d\eta \right]^{\frac{1}{n_N - 1}}, \quad (31)$$

则(30)式可简写为

$$Q_{N+1} = \frac{Q}{4\pi M t^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{\mu^* r_c^2}{4Tt} (1 - ak)} \cdot F(r_c, t). \quad (32)$$

将(32)式代入(28)式,并考虑到 $ak=1, b=0$, 可得

$$v_d(r, t) = \frac{Q}{2\pi M r} \cdot F(r_c, t) \cdot e^{-\frac{\mu^* r^2}{4Tt}}. \quad (33)$$

(33)式即是线性渗流区域内渗流速度的表达式。

3 结 论

本文虽然对线性与非线性渗流区域内的渗流速度进行了精确求解,但是可以看出,解析解仍然很复杂,在今后研究工作中,应结合具体的渗流问题,对所得的解析解进一步化简,以便于应用。

[参考文献]

- [1] Sen Z Non-darcian flow in fractured rocks with linear flow pattern[J]. Hydro, 1987, 92: 43- 57
- [2] Sen Z Type curve for two-regime well flow [J]. Hydro Engrg, 1988, 114(12): 1461- 1484
- [3] Sen Z Non-linear flow toward wells[J]. Hydro Engrg, 1989, 115(2): 193- 209
- [4] 常安定, 郭建青, 王洪胜 两种流态区域条件下井流问题的解析解[J]. 水利学报, 2000, 6(6): 49- 53
- [5] 刘元会, 常安定, 张凤银 两种流态并存区域上井流问题的渗流速度[J]. 纺织高校基础科学学报, 2004, (3): 213- 216
- [6] 刘元会, 常安定, 邓秋霞 线性非线性流并存区域井流问题的水头降深研究[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2005, 33(3): 113- 115

Research on unsteady well flow of the specific discharge of the nonlinear regime

L IU Yuan-hui, CHANG An-ding

(Math. and Phy. Institute of Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China)

Abstract: Nonequilibrium analytical solutions are presented for full penetrating well by incorporating the concept of the existence of a non-Darcy flow regime around the pumping well and a Darcy flow regime away from the well. In order to research the two-regime well flow problems more accurately, the nonlinear exponent has been discussed in details according to the separations of nonlinear domain and the analytical solutions to the problem have been derived in the literature.

Key words: the linear flow; the nonlinear flow; the flow domain; the specific discharge