

基于稳定分布的证券投资投资组合模型^{* *}

张 国¹, 刘则毅^{1, 2}, 唐万生³

(1 天津大学 理学院 数学系, 南开大学-天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072;

2 深圳大学 理学院, 广东 深圳 518060; 3 天津大学 管理学院, 天津 300072)

[摘 要] 采用稳定分布描述证券收益率, 以克服正态分布不能描述证券收益率“高峰厚尾”的问题, 利用低阶矩代替传统正态分布的二阶矩构造了基于稳定分布的均值/绝对偏差投资组合模型, 并在中国市场的实际情况下研究了模型的改进及解法, 最后通过算例说明了模型的可行性。

[关键词] 稳定分布; 投资组合; 风险证券; 收益率; 绝对偏差

[中图分类号] O 229; F830

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2005)07-0155-04

传统的证券组合投资研究^[1~3], 如Markowitz投资组合模型^[1], 大多采用正态分布来描述收益率变化的概率分布, 然而在许多实证分析研究中, 证券收益率经常具有“高峰厚尾”现象, 这是正态分布所不能描述的, 而利用稳定分布去描述则能克服这一现象。用帕雷托稳定分布对金融数据建模的思想来自Mandelbrot^[4]的开创性研究, 后来, Fama^[5]等相继对此进行了研究, 其中稳定分布由Levy于20世纪20年代提出, 其为中心极限定理的更一般形式。此后, 由Engle等^[6]引入的自回归条件异方差(ARCH)模型, 以及由Bollerslev^[7]推广的广义ARCH(GARCH)模型, 能够反映金融资产时间序列的2个重要特征: 波动集聚性或条件异方差性及尖峰性或厚尾性。在实证研究中, Mantegna等^[8]论述了美国股票市场股票收益具有稳态特性。徐龙炳等^[9, 10]研究认为, 中国股票市场波动呈现非线性, 具有状态持续性特征。Hurst等^[11]讨论了对数稳定分布下的期权定价公式; Mittnik等^[12]讨论了稳定分布下的期权定价公式; 殷勇^[13]、姜理等^[14]研究了稳定分布下的投资组合问题。本研究克服了传统研究过程中忽略或丢失证券收益率“高峰厚尾”处数据的问题, 为投资者的科学决策提供了现实依据, 对股票收益率分布研究具有一定的借鉴和指导意义。

1 稳定分布

由于全文的自封闭性, 首先介绍稳定分布的基本概念。

定义1: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, X$ 是独立同分布的随机变量, X 的分布函数为 F , 若存在常数 $C_n > 0, \beta_n$ 使得 $X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + \beta_n$, 并且 F 不集中在一点, 则称 X 或 F 服从稳定分布, β_n 称为中心常数, 当 $\beta_n = 0$ 时, 则认为是严格稳定的。其中“ $\stackrel{d}{=}$ ”表示同分布。

记稳定分布为 $S(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma)$, 其特征函数为
$$\Phi(t) = \exp \left\{ i\mu t - \sigma |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\},$$
其中
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}。$$

式中, α 为特征指数($0 < \alpha \leq 2$), 且决定分布函数尾部的厚薄, α 越小, 说明分布函数尾部比正态尾部越厚, 比正态峰度越大; β 为偏度指数($-1 \leq \beta \leq 1$); σ 是尺度参数($\sigma > 0$); μ 是位置参数($\mu \in \mathbb{R}$)。当 $\alpha = 2, \beta = 0$ 时, 相应的分布即为正态分布, 其均值为 μ , 方差为 $2\sigma^2$ 。在稳定分布族中, 只有正态分布存在方差, 其余的分布函数只存在阶数小于 α 的矩。

对于独立随机变量和的分布, 可由稳定分布特性确定。若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 其分布分别为 $S(x_j; \alpha_j, \beta_j, \mu_j, \sigma_j)$, 则线性和 $X = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \dots + \omega_n X_n$, 具有分布 $S(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma)$, 其中 $\mu = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 + \dots + \omega_n \mu_n$, $\sigma = |\omega_1|^{\alpha_1} \sigma_1 + |\omega_2|^{\alpha_2} \sigma_2 + \dots + |\omega_n|^{\alpha_n} \sigma_n$ 。

在资本市场中, 特征指数几乎都大于1, 偏度指

* [收稿日期] 2004-10-18

[基金项目] 国家自然科学基金项目(70171004); 南开大学-天津大学刘徽应用数学中心项目

[作者简介] 张 国(1981-), 男, 山东潍坊人, 在读硕士, 主要从事管理科学和金融工程方面的研究。

数近似为 0。在后面的研究中,仅考虑所有的分布均具有相同的 α 和 β 指数,并且有 $\alpha > 1, \beta = 0$ 。

定义 2: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, X$ 是独立同分布的随机变量, 分布函数是 $F(x)$, 前 n 项的规范和 $S_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / (B_n - A_n)$, 选择适当的 A_n, B_n , 使当 $n \rightarrow +\infty$ 时, S_n 的分布函数趋向于某个分布函数 $V(x)$, 则称 $F(x)$ 被吸引到 $V(x)$ 。所有被吸引到 $V(x)$ 的分布函数集合称为 $V(x)$ 的吸引域。

下面给出 2 个定理, 以说明用稳定分布描述证券收益率的合理性。

定理 1^[13]: 分布函数 $F(x)$ 属于某个正态分布的吸引域, 当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \int_{|t| > x} dF(t)}{\int_{|t| < x} t^2 dF(t)} = 0$$

该定理是收敛到正态分布的中心极限定理的最一般形式, 其限制了 $F(x)$ 在极端值处的行为特征。若用密度函数 $f(x)$ 表达, 则为: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $f(x)$ 的衰减与 $|x|^{-3}$ 相当或更快, 则 $F(x)$ 属于正态分布的吸引域。也就是说, 正态分布仅能描述产生大的价格波动的可能性呈 $|x|^{-3}$ 或更快衰退这种情形。然而决定价格变化的市场机制是复杂的, 若是衰减慢于 $|x|^{-3}$ 又如何呢?

定理 2^[13]: 分布函数 $F(x)$ 属于某一 α -稳定分布 (即特征指数为 $\alpha (0 < \alpha \leq 2)$ 的稳定分布) 的吸引域, 当且仅当

$$(1) F(-x)/(1-F(x)) \rightarrow C_1/C_2 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$(2) \text{对任意 } k > 0, \text{ 有 } (1-F(x) + F(-x))/(1-F(kx) + F(-kx)) \rightarrow k^\alpha \quad (x \rightarrow \infty)$$

该定理表明, $x \rightarrow \infty$ 时, 若密度函数 $f(x)$ 的衰减率与 $|x|^{-(1+\alpha)}$ 相当, 那么 $F(x)$ 就属于稳定分布的吸引域。由此可见, 稳定分布比正态分布具有更强的描述能力。

2 基于稳定分布的投资组合模型

将稳定分布用于投资组合分析的困难在于, 投资组合的分布难以确定, Fama 和 Samuelson 采用了 Sharpe 的收益率生成模型, 即将单个证券收益率看成是由共同市场因素的影响和不能由这些因素解释的残差组成。但是这种方法要求各个证券的残差之间相互独立, 这在实际中难以保证。因此, 将稳定分布用于投资组合分析的困难就在于非独立稳定随机变量和分布的确定。下面对市场作如下 2 个假设, 以便推导基于稳定分布的投资组合模型。

假设 1: 由证券收益率随机变量组成的有限维向量服从多维稳定分布;

假设 2: 证券收益率随机变量之间只存在线性关联, 即若不线性相关, 则必相互独立。

这 2 个假设实际上也隐含于基于正态分布的投资组合模型中, 因为在正态分布条件下, 上面两假设均成立。在此假设下, 有下列结论:

定理 3: 对任意 2 个随机变量 $X_1 \sim S(x_1; \alpha, 0, \mu_1, \sigma_1), X_2 \sim S(x_2; \alpha, 0, \mu_2, \sigma_2)$, 都存在 $a \in R, E \sim S(e; \alpha, 0, \mu_e, \sigma_e)$, 使 $X_1 = aX_2 + E, E$ 与 X_2 独立。

$$\text{证 明: 取 } a = \frac{E[(X_1 - \bar{X}_1) \operatorname{sgn}(X_2 - \bar{X}_2)]}{E|X_2 - \bar{X}_2|},$$

$$E = X_1 - aX_2$$

由假设 1 知 $E \sim S(e; \alpha, 0, \mu_e, \sigma_e)$ 。下面只需证明 E 与 X_2 独立。由假设 2, 若 E 与 X_2 不独立, 则 E 与 X_2 之间只能是线性关系, 即 $E = kX_2 + \epsilon, \epsilon$ 为与 X_2 独立且服从稳定分布的随机变量, $k \in R$ 。将 $E = X_1 - aX_2$ 代入上式, 有:

$$X_1 - aX_2 = kX_2 + \epsilon$$

$$\text{或者 } (X_1 - \bar{X}_1) - a(X_2 - \bar{X}_2) = k(X_2 - \bar{X}_2)$$

将上式两边同乘以符号函数 $\operatorname{sgn}(X_2 - \bar{X}_2)$ 并取概率平均, 然后将 a 的表达式代入, 得到:

$$kE[(X_2 - \bar{X}_2) \operatorname{sgn}(X_2 - \bar{X}_2)] = 0$$

$$\text{又 } E[(X_2 - \bar{X}_2) \operatorname{sgn}(X_2 - \bar{X}_2)] =$$

$$E|X_2 - \bar{X}_2| \neq 0,$$

故 $k = 0$ 。由此, E 与 X_2 独立, 证毕。

定义 3: 任意 $X_i \sim S(x_i; \alpha, 0, \mu_i, \sigma_i), (i = 1, 2)$, 称 $E[(X_1 - \bar{X}_1) \operatorname{sgn}(X_2 - \bar{X}_2)]/E|X_2 - \bar{X}_2|$ 为变量 X_1 对 X_2 的协变化系数, 记作 a_{12} 。

协变化系数 a_{12} 扮演着与正态分布中 $\operatorname{cov}(X_1, X_2)/\operatorname{var}(X_2)$ 相似的角色。

基于上述定理 3 和定义 3, 可以求出任意 2 个稳定随机变量和的分布。

定理 4: 任意 $X_i \sim S(x_i; \alpha, 0, \mu_i, \sigma_i), (i = 1, 2)$, 则 $\omega X_1 + \omega X_2 \sim S(x; \alpha, 0, \mu_{12}, \sigma_{12})$, 其中 $\mu_{12} = \omega \mu_1 + \omega \mu_2, \sigma_{12} = (|\omega a_{12} + \omega|^\alpha - |\omega a_{12}|^\alpha) \sigma_2 + |\omega|^\alpha \sigma_1$ 。

下面建立投资组合模型。由于稳定分布不存在二阶矩或更高阶矩, 传统正态分布的均值/方差模型不再适用。由于资本市场中特征指数大于 1, 稳定分布存在一阶矩, 因此可用均值来表示预期收益率, 用绝对偏差表示风险构造基于稳定分布的均值/绝对

偏差投资组合模型。对于稳定分布 $S(x; \alpha, 0, \mu, \sigma)$, 当 $1 < \alpha < 2$ 时, 其均值为 μ , 平均绝对偏差为 $\sigma^{1/\alpha} c(\alpha)$, $c(\alpha)$ 是 α 的函数, 当 α 一定时, 可用 $\sigma^{1/\alpha}$ 或 σ 来表示风险。

设市场上存在 n ($n > 1$) 种风险证券, 其收益率 X_i 的概率分布分别为 $S(x_i; \alpha, 0, \mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

记投资于证券 X_i 的比重分别为 ω ($i = 1, 2, \dots, n$), 则其投资组合的预期收益率为: $\mu_p = \sum_{i=1}^n \omega \mu_i$ 风险为: $\sigma_p = \sum_{i=1}^n \left(\left| \sum_{j=1}^j \omega a_{ij} \right|^\alpha - \left| \sum_{j=1}^{j-1} \omega a_{ij} \right|^\alpha \right) \sigma_i$, 其中当 $j = 1$ 时, $\sum_{j=1}^j \omega a_{ij} = \omega$, $\sum_{j=1}^{j-1} \omega a_{ij} = 0$ 。

于是, 对于收益水平高于给定的 R_0 (R_0 已知, 且 $\min \mu_i \leq R_0 \leq \max \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) 而风险最小的投资组合问题, 即可表示为如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\omega} (\sigma_p) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega = 1 \\ \mu_p \geq R_0 \\ \omega \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

3 投资组合模型的改进

3.1 考虑交易费用的投入和资金的限制

上述模型未考虑交易费用的问题, 然而在我国目前的交易制度下是存在交易费用的。设投资者的可支配金额为 g , 以 ω ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示投资在第 i 种风险证券的投资比重, 则第 i 种风险证券的投资金额为 $g\omega$, 以 c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示第 i 种风险证券

单位交易额的交易成本。则交易费用为 $\sum_{i=1}^n c_i g \omega$, 相

应的投资收益率为 $\mu_p = \sum_{i=1}^n (\omega \mu_i - \omega c_i) / \sum_{i=1}^n \omega$ 。此

处, $0 < \sum_{i=1}^n \omega < 1$, 因为交易费用也占一定比重, 为

$$1 - \sum_{i=1}^n \omega。$$

3.2 加入最小交易单位的限制

在上述模型中, 隐含了交易单位无限可分的假设, 这种假设在我国也是行不通的。我国股票交易市场的最小交易单位是一手(100股), 债券的最小交易单位为10张, 所以交易单位无限可分的假设可能会造成较大偏差。下面加入最小交易单位的限制。

以 m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示第 i 种风险证券的最

小交易单位的价格, 以 t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示当前决策中第 i 种风险证券的投资单位数, 则有 $g\omega = m_i t_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。基于上述改进, 可得到下列模型:

$$\begin{aligned} \min_{(t_i)} & \sum_{i=1}^n \left(\left| \sum_{j=1}^j \omega a_{ij} \right|^\alpha - \left| \sum_{j=1}^{j-1} \omega a_{ij} \right|^\alpha \right) \sigma_i = \\ & \sum_{i=1}^n \left(\left| \sum_{j=1}^j m_i t_i a_{ij} / g \right|^\alpha - \left| \sum_{j=1}^{j-1} m_i t_i a_{ij} / g \right|^\alpha \right) \sigma_i; \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i t_i (\mu_i - c_i) / \sum_{i=1}^n m_i t_i \geq R_0 \\ g - \min \{m_i (1 + c_i)\} < \sum_{i=1}^n m_i t_i (1 + c_i) \leq g \\ t_i = 0, 1, 2, \dots (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, 当 $j = 1$ 时, $\sum_{j=1}^j \omega a_{ij} = \sum_{j=1}^j m_i t_i a_{ij} / g = m_i t_i / g$, $\sum_{j=1}^{j-1} \omega a_{ij} = \sum_{j=1}^{j-1} m_i t_i a_{ij} / g = 0$ 。

对于投资者来说, 投资余额 $g - \sum_{i=1}^n m_i t_i (1 + c_i)$ 可存入银行, 作为一种无风险投资。

对模型的求解, 主要是对模型中参数即协变系数 a_{kj} 和稳定分布中参数 α, μ, σ 的估计。对 a_{kj} 的估计, 可采用矩估计法直接进行。而对于稳定分布各参数的估计^[15~17], 由于稳定分布没有密度函数的显式表达式, 故在利用极大似然估计(MLE)时只能利用数值逼近法求解。目前, John Nolan 的 Stable 程序是求解的最好程序^[6~9], 对于 $\alpha > 0.4$, 利用了样条逼近法逼近稳定密度函数, 从而可以通过 Nolan 的 Stable 程序^[18]得到 (α, μ, σ) 的估计。本文对模型的具体求解采用 Matlab 优化工具箱中的 `fmincon` 函数。

4 算例分析

下面给出一个两支股票的投资组合模型及求解的算例。从深市股票中任意选取两支股票 000856 (唐山陶瓷) 和 000883 (三环股份), 取 1998-10-05~2001-01-05 的日收盘价数据作为样本, 计算得到相应的日收益率作为研究样本。

利用前面的方法首先进行参数估计, 得到: $\alpha = 1.80$, $\beta = 0$, $\mu_1 = 0.001$, $\sigma_1 = 0.015$, $\mu_2 = 0.001$, $\sigma_2 = 0.016$, $a_{12} = 0.325$ 。为了简化计算, 以 $c = 0.05\%$, $R_0 = 0.063\%$ 分别作为一个交易日内给定的单位交易额的交易成本和收益水平, 假设 $g = 10^6$, 此时 $m_1 = 12.7$, $m_2 = 13.6$ 。由此得到这两种股票的投资组合模型:

$$\min_{(t_i)} \sigma_p = 1.250 |t_1|^{1.8} + |4.125 t_1 +$$

$$s.t. \begin{cases} 13.6t_2 \mid^{1.8} \times 0.016 \\ 3.81t_1 - 9.52t_2 \leq 0 \\ 12.706t_1 + 13.607t_2 \leq 10^6 \\ 12.706t_1 + 13.607t_2 > 10^6 - 12.706 \\ t_1, t_2 = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

用 Matlab 语言编程, 解该模型得: $t_1 = 40.948$, $t_2 = 35.254$, t_1, t_2 即为投资组合中两支股票的投资单位数。

5 结 语

本文提出了一种基于稳定分布的投资组合模型, 并根据中国市场的实际情况对模型进行了改进, 给出了算例分析。然而, 对于稳定分布的研究是从上世纪末才开始的, 许多问题尚未彻底解决, 比如本文未突出的参数估计和对投资组合模型的求解问题, 这均有待于进一步发展和完善。

[参考文献]

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77- 91.
- [2] Black F, Jensen M, Scholes M. The capital asset pricing model: some empirical test studies in the theory of capital markets[M]. New York: Praeger Publishers, 1972. 110- 120.
- [3] Sharpe W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under condition of risk[J]. Journal of Finance, 1964, 19(3): 425- 442.
- [4] Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices[J]. Journal of Business, 1963, 36: 394- 491.
- [5] Fama E. F. The behavior of stock market prices[J]. Journal of Business, 1965, 38: 34- 105.
- [6] Engle R. F., Bollerslev T. Modeling the persistence of conditional variances[J]. Econometric Reviews, 1986, 5: 1- 50.
- [7] Bollerslev T. A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return[J]. Review of Economics and Statistics, 1987, 69: 542- 547.
- [8] Mantegna R. N., Stanley H. E. Modeling of financial data: comparison of truncated Levy flight and the ARCH (1) and GARCH (1, 1) processes[J]. Physica, 1998, 254: 77- 84.
- [9] 徐龙炳, 陆蓉 R/S 分析探索中国股票市场的非线性[J]. 预测, 1999, 18(2): 59- 62.
- [10] 徐龙炳. 中国股票市场股票收益稳态特性的实证研究[J]. 金融研究, 2001, (6): 36- 43.
- [11] Hurst S. R., Platen E., Rachev S. T. Option pricing for a log stable asset price model[J]. Mathematical and Computer Modeling, 1999, 29: 105- 119.
- [12] Mittnik S., Rachev S. T. Option pricing for stable and infinitely divisible asset returns[J]. Mathematical and Computer Modeling, 1999, 29: 93- 104.
- [13] 殷勇. 稳定分布假设及投资组合模型研究[J]. 数量经济技术经济研究, 1996, (11): 59- 63.
- [14] 姜理, 刘永清. 投资组合收益及风险分析的优化方法[J]. 华南理工大学学报, 1999, 27(8): 68- 71.
- [15] 顾娟, 茆诗松. 稳定分布的参数估计[J]. 应用概率统计, 2000, 18(4): 342- 346.
- [16] John Nolan. Numerical calculation of stable densities and distribution functions[J]. Statistic-Stochastic Models, 1997, 13(4): 759- 774.
- [17] John Nolan. Parameterizations and modes of stable distributions[J]. Statistics and Probability Letter, 1998, 38: 187- 195.
- [18] John Nolan. Stable.exe (Stable 程序) [EB/OL]. <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>, 2003-11-25.

Portfolio selection model based on stable distribution

ZHANG Guo¹, LIU Ze-yi^{1,2}, TANG Wan-sheng³

(1 Department of Mathematics of Science College, Tianjin University, Liu Hui Center for Applied Mathematics,

Nankai University & Tianjin University, Tianjing 300072, China;

2 College of Sciences, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China;

3 School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: This paper applies the stable distribution, which can better describe the financial data with the heavy tail and excessive kurtosis than the normal distribution, to fit the changes of the securities' return rate. But in stable distribution the second moment and higher moments do not exist, so the traditional mean-variance model with normal distribution is not available. Then the lower moment instead of the second moment is used to build the mean-absolute deviation, and the model is modified. Finally, an example is given to illustrate the model's feasibility.

Key words: stable distribution; portfolio selection; risky security; rate of return; absolute deviation