

地下工程导线测量中加测陀螺方位角的最佳位置研究*

韩群柱¹, 耿宏锁², 李 宇²

(1 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048, 2 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 针对地下工程导线测量中, 采用测角量边的单一导线控制测量而导致控制精度较低的问题, 分析了直伸型导线测量中加测陀螺方位角的数量及其增益, 并探讨了直伸型导线和非直伸型典型导线, 如 L, Z, U 型导线加测陀螺方位角的最佳位置。

[关键词] 地下工程; 隧洞贯通; 导线观测; 陀螺方位角

[中图分类号] P221+.4

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2004)12-0116-05

长期以来, 在地下建筑工程中布设导线时一直采用常规的测量方法, 随着工程导线的延伸, 多种误差随之累积增大, 最终会影响地下工程的顺利贯通, 因此, 在地下工程中常采用加测陀螺方位角的方法, 以确定地下导线的起始方位角, 减少起始方向误差对贯通精度的影响, 限制系统误差的累积且对导线方向进行检核, 从而提高和改善地下导线的精度和可靠性^[13]。

自 20 世纪 70 年代以来, 国外许多发达国家均致力于陀螺经纬仪的开发、研究及应用, 我国从 1987 年研制出光电积分型自动陀螺经纬仪, 自此陀螺经纬仪在地下建筑工程测量定向中得到了较快的发展。国内外许多学者^[4]不同程度地研究了地下建筑工程测量中, 利用陀螺经纬仪进行定向时其对地下控制测量整体精度的增益问题, 并得出了一些有益的结论。但对直伸型导线中加测不同数量陀螺

方位角的增益情况, 以及实践中常采用 L, Z 和 U 型导线时加测陀螺方位角的最佳位置涉足甚少。因此, 本研究试图通过对地下工程导线测量中加测陀螺方位角的最佳位置进行研究, 以期为提高隧洞贯通等地下建筑工程的测量精度提供理论依据。

1 直伸型导线加测陀螺方位角的最佳位置

在地下隧洞施工中, 布设地下导线的形式和开挖隧洞的形状有关, 一般情况下, 可在布设单一直伸型导线的基础上加测陀螺方位角, 以提高贯通精度。为了比较各种加测陀螺方位角情况的可靠度, 现分以下 4 种情况进行讨论。

1.1 不加测陀螺方位角

如图 1 所示, 对向开挖的坑道为直伸型, 每端布设 1 条支导线, 导线起始边上有 1 个起始方位角 α , 贯通面位于支导线的终点 q 处。

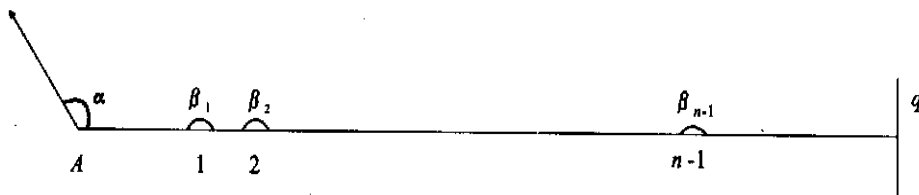


图 1 直伸型支导线布设示意图

Fig. 1 Setting and layout sketch of straight and extending guide line

据误差传播定律^[1]知, 终点的横向中误差为:

* [收稿日期] 2004-06-30

[基金项目] 西安理工大学青年专项基金资助项目

[作者简介] 韩群柱(1967-), 男, 陕西西安人, 讲师, 工学硕士, 主要从事水利水电工程施工及工程测量研究。

$$\begin{aligned}
 m_q^2 &= \frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2} L^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} (s^2 + 2^2 s^2 + \dots + n^2 s^2) \\
 &= \frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2} (ns)^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} s^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\
 &= \frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2} (ns)^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} s^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中, m_{α_A} 为导线起始方位角的中误差; m_{β} 为导线转折角的中误差; n 为导线边数; s 为导线边的平均边长; L 为导线全长; m_q 为贯通面横向中误差; ρ 为常数。

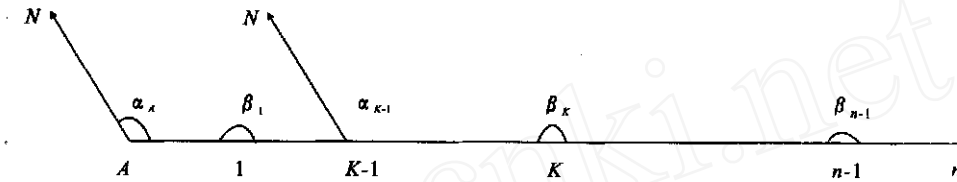


图 2 加测 1 个陀螺方位角的支导线布设示意图

Fig. 2 The guide line setting and layout sketch of adding to measure the top-shaped azimuth angle

列出 K 点横坐标的权函数式并展开成级数的形式, 即

$$\begin{aligned}
 F_{\Delta X} &= \{ KV_{\alpha_A} + (K-1)V_1 + \\
 &\quad (K-2)V_2 + \dots + V_{K-1} \} s / \rho
 \end{aligned}$$

此处可作如下假定:

$$\begin{aligned}
 s &= s_1 = s_2 = \dots = s_n; m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \dots = \\
 &\quad m_{\beta}; P_{\beta} = 1; m_{\alpha_A} = m_{\alpha_{K-1}}
 \end{aligned}$$

则:

$$[\frac{aa}{P}] = (K-1) + 2\omega^2$$

$$[\frac{af}{P}] = \left[\frac{K(K-1)}{2} + K\omega^2 \right] s / P$$

$$[\frac{ff}{P}] = \left[\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} + K^2\omega^2 \right] s^2 / P^2$$

代入权倒数公式^[3], 得

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P_F} &= [\frac{ff}{P} \cdot 1] = [\frac{ff}{P}] - \frac{[\frac{af}{P}]^2}{[\frac{aa}{P}]} \\
 &= \left[\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} + K^2\omega^2 - \right. \\
 &\quad \left. \frac{K^2(K-1+2\omega^2)}{4} \right] s^2 / P^2
 \end{aligned}$$

故 K 点的横向中误差为

$$\begin{aligned}
 m_q &= m_{\beta} \sqrt{\frac{1}{P_F}} = \frac{m_{\beta}}{\rho} s \cdot \\
 &\quad \sqrt{\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} + K^2\omega^2 - \frac{K^2(K-1+2\omega^2)}{4}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

(2) 式中, 第 1 项为测角中误差对 K 点的影响,

1.2 加测 1 个陀螺方位角

如图 2 所示, 在导线的 $K-1$ 至 K 边上加测 1 个陀螺方位角, 此时 A 点与 K 点之间可视为附和导线^[2], 而 K 与 n 之间仍为支导线, 则 A 点与 K 点间的方位角条件为

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 + \dots + V_{K-1} + \\
 V_{\alpha_A} - V_{\alpha_{K-1}} + W_{\alpha} = 0
 \end{aligned}$$

式中, V_i , V_{α_A} , $V_{\alpha_{K-1}}$ 为各边方位角改正数; $W_{\alpha} = \sum_{i=1}^{K-1} \beta_i \pm (K-1) \cdot 180^\circ + (\alpha_A - \alpha_{K-1})$ 。

第 2 项为起始方位角对 K 点的影响; 第 3 项是增加方位角条件所得到的增益。

由于加测的陀螺方位角 α_{K-1} 具有独立的性质^[4], 且 $A \sim K$ 间的附和导线和 $K \sim n$ 的支导线不相关, 故可得到 n 点处横向中误差的估算公式为

$$\begin{aligned}
 m_q^2 &= \frac{m_{\beta}^2 s^2}{\rho^2} \left[\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} + \right. \\
 &\quad \left. K^2\omega^2 - \frac{K^2(K-1+2\omega^2)}{4} \right] + \\
 &\quad \frac{m_{\alpha_{K-1}}^2}{\rho^2} s^2 (n-K)^2 + \\
 &\quad \frac{m_{\beta}^2 s^2 (n-K)(n-K+1)(2n-2K+1)}{\rho^2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

1.3 等间隔加测 2 个陀螺方位角

这种情况和第 2 种的区别在于增加了附和导线的个数, 如加测 i 个陀螺方位角, 则有 i 个方位角条件, 这些条件间非相关, 则 n 点处的横向中误差为

$$\begin{aligned}
 m_q^2 &= \frac{m_{\beta}^2 s^2}{\rho^2} \cdot i \cdot \left[\frac{K(K-1)(2K-1)}{6} + \right. \\
 &\quad \left. K^2\omega^2 - \frac{K^2(K-1+2\omega^2)}{4} \right] + \\
 &\quad \frac{m_{\alpha_{K-1}}^2}{\rho^2} s^2 (n-iK)^2 + \\
 &\quad \frac{m_{\beta}^2 s^2 (n-iK)(n-iK+1)(2n-2iK+1)}{\rho^2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

1.4 每条边上均加测陀螺方位角(陀螺导线)

此时, 影响横向误差的只有陀螺方位角, 所以终点 n 的横向中误差为

$$m_q^2 = n \cdot \frac{m_a^2}{\rho^2} s^2 \tag{5}$$

下面给出 3 种具有不同定向精度和导线长度的

地下导线,其有关数据列于表 1。将表 1 中的数据代入式(1) (5),可以计算出各种情况下的横向中误差 m_q ,其计算结果列于表 2。

表 1 3 种不同精度导线的横向贯通误差比较

Table 1 Comparison of transverse run-through errors of three guide lines with different precisions

导线等级 Guide line	L/ m	S/ m	n	m_a/ s	m_p/ s
	1000	100	10	10	10
	780	60	13	15	15
	780	60	13	30	30

表 2 加测不同数量陀螺方位角后导线精度增益比较

Table 2 The guide line precision benefit increment comparison to the different precision guide line in adding to measure the top-shaped azimuth angle

导线等级 Guide line	未加测方位角时的 m_q/ mm Not adding to measure the azimuth angle	加测 1 个方位角 Adding to measure one azimuth angle		加测 2 个方位角 Adding to measure two azimuth angles		陀螺导线 The top-shaped guide line	
		m_q/ mm	增益/ % Benefit increments	m_q/ mm	增益/ % Benefit increments	m_q/ mm	增益/ % Benefit increments
	107	48	55	26	76	15	86
	137	53	61	33	76	16	88
	274	100	61	66	76	31	89

由表 2 可知,在地下导线中,加测不同个数陀螺方位角均可减少横向误差,且增益较大,加测 1 个陀螺方位角时,增益约 60 %;加测 2 个陀螺方位角时,增益近 76 %;全部加测陀螺导线时的增益接近 90 %。从精度和工作量两方面考虑,当导线边数 $n \leq 10$ 时,加测 1 个陀螺方位角即可; $n > 10$ 时,加测 2 ~ 3 个陀螺方位角为佳。

1.5 加测陀螺方位角最佳位置的确定

在 $m_q = \text{Min}$ 条件下求出 K/ n 的比值,简化(4)式,可得

$$m_q^2 = \frac{m_{ps}^2}{12\rho^2} [(i - 4i^2) K^2 + (3i + 18i^2 + 12i^2 n) K - (12in^2 + 36in) K + (4n^3 + 18n^2 + 2n)^2]$$

(6)式对 K 求导,并令其等于 0,则

$$\frac{\partial m_q^2}{\partial K} = \frac{m_{ps}^2}{12\rho^2} (aK^2 + bK + c) = 0 \tag{6}$$

式中, $a = 3i - 12i^2$, $b = 6i + 36i^2 + 24i^2 n$; $c = -(12in^2 + 36in)$ 。其中, n 为地下导线的总边数; K 为加测陀螺方位角之间的边数, K 随着加测个数 i 的不同而变化。解式(6)得

$$K = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7}$$

以 i 和 n 为变量,按式(7)计算 K 和 K/ n 值,列于表 3。由 3 表可知,在直伸导线中,当加测 1 个陀螺方位角时,加测最佳位置在导线全长的 2/3 处;若加测 2 个或 2 个以上陀螺方位角时,以均匀分布为佳。

表 3 K/ n 值与 i 和 n 的关系

Table 3 The K/ n specific value datasheet of changing the factor i and n

n	$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$			
	K	K/ n	K	K/ n	K	$2 K$	$3 K$	K/ n
5	3.7	0.74	2.2	4.4	0.44	1.5	3.0	0.31
10	7.2	0.72	4.2	8.4	0.42	3.0	6.0	0.30
13	9.2	0.71	5.5	11.0	0.42	3.9	7.8	0.30
15	10.6	0.70	6.3	12.6	0.42	4.5	9.0	0.30
20	17.3	0.69	8.3	16.6	0.41	5.9	11.8	0.30
25	18.9	0.69	10.3	20.6	0.41	7.4	14.8	0.29
30	20.6	0.69	12.3	24.6	0.41	8.8	17.6	0.29

2 几种非直伸型典型导线加测陀螺方位角的最佳位置

当地下导线并非直伸时,其一般由互相垂直的

直伸导线所组成。这样,就有构成某些典型图形的可能,如 L 型、Z 型或 U 型导线等。

2.1 L 型导线加测陀螺方位角的最佳位置

图 3 为 2 条互相垂直的直伸导线所组成的 L 型

导线。现假定 x 轴与导线 $A \sim B$ 一致, y 轴与导线 $B \sim K$ 一致, 其导线边数分别为 n_1 和 n_2 , 导线除起始边为陀螺定向边, 并在导线的 P 点边上加测 1 条陀螺定向边, 从而将 L 型导线分成陀螺方位角附合导线和支导线两个部分。

此时, 陀螺定向误差和导线测角误差引起的导线终点横向误差可按式计算:

$$m_q^2 = \frac{m_0^2}{\rho^2} (\eta_A^2 + \eta_P^2 + \eta_K^2) +$$

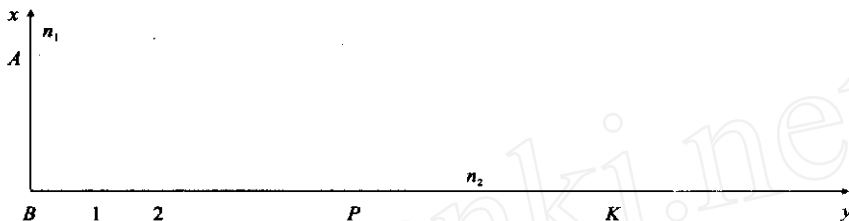


图 3 L 型导线布设示意图

Fig. 3 The L shape guide line setting and layout sketch

以 $m_q = \text{Min}$ 作为条件来判断最佳位置, 当 $n_1 = 0$ 时, L 型导线为直伸导线, 此时加测陀螺方位角的最佳位置在 $P = \frac{2}{3} n_2$ 处; 当 $n_1 \rightarrow \infty$ 时, 陀螺方位角附合导线的重心在 y 轴上的投影为 y_0 , 则

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} y_0 = s \frac{P(P-1)}{(n_1 + P)} = 0$$

此时, $A \sim B$ 段各导线点的 η_i 全为零, 陀螺方位角附合导线成为 $B \sim P$ 段直伸导线, 则式(9)可写为

$$m_q^2 = \frac{m_0^2}{\rho^2} s \left\{ P^2 Q + (n_2 - P)^2 Q + \frac{P^2 + (n_2 - P)^2}{3} \right\} \quad (10)$$

(10) 式对 P 微分, 令其等于 0, 即

$$\frac{\partial m_q^2}{\partial P} = 0,$$

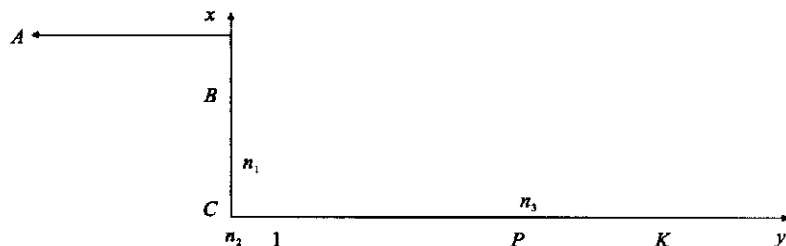


图 4 Z 型导线布设示意图

Fig. 4 The Z shape guide line setting and layout sketch

当 $n_2 = 0$ 时, Z 型导线为总边数 $n = n_1 + n_3$ 的直伸导线, 其最佳位置在 $\frac{2}{3} (n_1 + n_3)$ 处, 实际上, P 号边

$$\frac{m_0^2}{\rho^2} \left\{ [\eta_i^2] + [R_{Y_i}^2] \right\} \quad (8)$$

式中, $\eta_i = Y_i - Y_n$ (Y_n 为重心坐标); R_{Y_i} 为导线边在 y 轴上的投影长度。若令 m_β 为单位权中误差, 取 $Q = m_\alpha^2 / m_\beta^2$, 则有

$$m_q^2 = \frac{m_0^2}{\rho^2} (\eta_A^2 + \eta_P^2 + \eta_K^2) Q + \left\{ [\eta_i^2] + [R_{Y_i}^2] \right\} \quad (9)$$

当 $(2P - n_2)(2Q + n_2) = 0$, 可求出 P 号边的最佳位置, 即 $P = \frac{1}{2} n_2$ 。也就是说, 当 $n_1 \rightarrow \infty$ 时, 加测陀螺方位角的最佳位置在 $P = n_2/2$ 处。综上所述, 当 $0 < n_1 < \infty$ 时, L 型导线加测陀螺方位角的最佳位置在 $(\frac{2}{3} n_2, \frac{1}{2} n_2)$ 区间内。

2.2 Z 型导线加测陀螺方位角的最佳位置

如图 4 所示, 假定 x 轴与 $B \sim C$ 段导线重合, y 轴与 $C \sim K$ 段导线重合, 各导线段的边数分别为 n_1, n_2, n_3 , 若 $C \sim K$ 段导线的 P 边上加测 1 条陀螺定向边, 则加测的最佳位置可通过以下分析来确定。

$$P = \frac{2}{3} (n_1 + n_3) - n_1 = \frac{2}{3} n_3 - \frac{1}{3} n_1$$

当 $n_2 \rightarrow \infty$ 时,必有 $y_0 \rightarrow 0$,此时 $B \sim C$ 段导线各点的重心坐标 y_i 均为零,成为 $A \sim B$, $C \sim P$ 和 $P \sim K$ 3 段直伸导线,则式(9)变为:

$$m_q^2 = \frac{m_B^2}{\rho^2} s^2 \left[n_1^2 Q + P^2 Q + (n_3 - P)^2 Q + \frac{n_1^3 + P^3 + (n_3 - P)^3}{3} \right]$$

采用与前面类似的方法,可得出以下结论:

当 $0 < n_2 < \infty$ 时,加测陀螺方位角的最佳位置应在 $(\frac{2}{3}(n_3 - n_1), \frac{1}{2}n_3)$ 区间,取其中间位置,可知 Z 型导线在 $C \sim K$ 段加测陀螺方位角的最佳位置在 $P = \frac{7}{12}n_3 - \frac{1}{6}n_1$ 处。

在实际判断中,有可能出现 $n_2 > 3.5n_3$ 的情况,此时 P 为负值。则最佳位置不在 $B \sim C$ 和 $C \sim$

K 段,而在 $A \sim B$ 段约 $P = \frac{2}{3}(n_1 + n_3)$ 处。

2.3 U 型导线加测陀螺方位角的最佳位置

U 型导线也是由互相垂直的 3 条直伸导线所组成,总边数 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 。由于 U 型导线与 Z 型导线除 $A \sim B$ 导线方向相反外,其他类似,故可参照 Z 型导线的计算公式进行估计。显然,在 $C \sim K$

段时最佳位置为 $P = \frac{7}{12}n_3 + \frac{1}{6}n_1$

当 $n_1 > 2.5n_3$ 时,上式有 $P > n_3$,说明最佳位置不在 $C \sim K$ 段内,同时最佳位置也不会在 $B \sim C$ 段内,而是在 $A \sim B$ 段,即 $P = \frac{2}{3}(n_1 - n_3)$ 。

3 结 论

1)在地下导线中,加测陀螺方位角均可减少横向误差,且随加测密度增加控制增益明显。

2)L 型导线中,当 $0 < n_1 < \infty$ 时,加测陀螺方位角的最佳位置在 $(\frac{2}{3}n_2, \frac{1}{2}n_2)$ 。

3)Z 型导线中,当 $0 < n_2 < \infty$ 时,加测陀螺方位角的最佳位置应在 $(\frac{2}{3}(n_3 - n_1), \frac{1}{2}n_3)$;

4)U 型导线中,当 $n_1 > 2.5n_3$ 时,加测陀螺方位角的最佳位置应在 $A \sim B$ 段内,即 $P = \frac{2}{3}(n_1 - n_3)$ 。

本文讨论了几种典型图形中加测陀螺方位角的分布问题,至于更复杂的图形,可参考上述分析方法进行逐步计算。

[参考文献]

- [1] 武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础[M]. 第 2 版. 北京:测绘出版社,1994.
- [2] 孔祥元,梅吴义. 控制测量学(下册)[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1996.
- [3] 冶金工业部成都勘察公司修订. 控制测量手册[M]. 北京:冶金工业出版社,1979.
- [4] 周立吾,张国良. 矿山测量学[M]. 江苏徐州:中国矿业大学出版社,1986.

The optimum place research of adding to survey the top-shaped azimuth angle in guide line survey of underground project

HAN Qun-zhu¹, GENG Hong-suo², LI Yu²

(1 College of Water Conservancy and Hydro Electricity, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;

2 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: In guide line survey of underground project, the single guide line of surveying the angle and the border length is adopted to control surveying, such a method may lead to a lower controlling precision. Aimed at this problem, the numbers and its benefit increments of adding to survey the top-shaped azimuth angle in linear and extending shaped guide line survey are analyzed in this paper, and the linear and extending shaped guide line and some other types of guide line, such as L, Z and U-shaped guide line, are studied. Furthermore, the optimum places of adding to survey the top-shaped azimuth angle in L, Z and U-shaped guide line are also discussed in this paper.

Key words: underground project; tunnel run-through; guide line survey; top-shaped azimuth angle