

# 用曲面拟合法确定平原区域正常高的方法<sup>\*</sup>

耿宏锁<sup>1</sup>, 王宏斌<sup>2</sup>, 殷彦平<sup>1</sup>

(1 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

2 西北农林科技大学 机械与电子工程学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 对应用 GPS 技术结合几何水准测量资料确定正常高的方法进行了研究, 针对测区地形特点, 选择合理的曲面拟合数学模型, 并以此为基础建立计算其他 GPS 点高程异常和正常高的方程。同时, 结合工程实践对上述求解方程进行了验证, 其拟合结果的标准差为 1.1 cm, 达到了四等水准测量的要求。研究证明, 采用一定密度及合理分布的 GPS 水准高程联测点, 选择曲面函数模型拟合区域大地水准面, 是平原区域确定正常高的一种行之有效的办法。

[关键词] GPS; 大地高; 正常高确定

[中图分类号] P228.4

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2004)11-0143-04

我国普遍采用的高程系统为正常高系统, 是以似大地水准面为参考面的高程系统, 测定高程通常采用几何水准测量法。传统的几何水准测量是测绘领域中测定正常高的主要方法, 这种方法精度较高, 但实施起来费时费力, 作业效率低。而 GPS 测量具有全天候、快速、经济等优点。在多数情况下, 工程应用领域主要是利用 GPS 测量中的平面位置信息(大地坐标转换后的高斯平面坐标), 没有充分利用高程信息, 对 GPS 定位技术成果的开发利用不够完善。

用 GPS 测定的三维坐标(大地经度、大地纬度和大地高)都是以 WGS-84 参考椭球面为基准的, 测定的大地高是一个几何量, 与地球的形状和重力场的分布没有关系, 而正常高是一个物理量。如果用 GPS 大地高确定正常高, 即在一定范围内用 GPS 测量来代替几何水准测量, 不仅可以获得可观的经济效益, 也为通过 GPS 测量确定大地水准面的研究提供了参考。因此, 用 GPS 大地高确定正常高的方法研究不但具有一定的科学价值和重要的现实意义, 而且具有十分广阔的应用前景。

国内外从 20 世纪 80 年代末期开始探索用 GPS 测定正常高的理论与方法, 并做了大量的试验研究, 取得了可喜的进展。早期的研究表明<sup>[1]</sup>, 在地势平坦的区域内, 用 GPS 与重力方法相结合能获得厘米级精度的正常高, 但这种方法因各地普遍缺少足够精确的重力数据难以推广。本研究在系统研究

GPS 高程测量相关理论与技术的基础上, 结合杨凌城区 GPS 高程控制网数据, 重点讨论了用二次曲面函数拟合大地水准面, 确定正常高的方法。

## 1 技术关键与数学模型

### 1.1 技术关键

GPS 定位结果是点位在 WGS-84 坐标系的几何位置, 即大地经度  $L$ 、大地纬度  $B$  和大地高  $H$ , 经坐标转换后仍然是几何位置, 只不过变成转换坐标系中的坐标, 如高斯平面坐标。其中高程仍为大地高, 即点位沿法线方向至参考椭球面的距离, 而大部分工程网要求采用正常高系统, 即点位沿铅垂线至似大地水准面的距离  $H_{正}$ 。二者的差异为高程异常相同  $\xi$ , 即

$$H = H_{正} + \xi \quad (1)$$

高程异常  $\xi$  与地球的重力场有关, 不同地方高程异常  $\xi$  也不同, 所以要把 GPS 测得的大地高  $H$  转换成正常高  $H_{正}$ , 关键是求得精确的高程异常值  $\xi$ 。

### 1.2 数学模型

采用数学模型简单、几何形状规范, 需要已知水准资料较少的二次曲面函数作为拟合大地水准面的数学模型。

对于 GPS 水准联测点  $P_k$ , 拟合模型可写为:

$$\xi_k = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta x_k + \alpha_2 \Delta y_k + \alpha_3 \Delta x_k^2 +$$

\* [收稿日期] 2003-09-24

[基金项目] 杨凌示范区管委会土地规划项目(杨管办发[2003]7号)

[作者简介] 耿宏锁(1965-), 男, 陕西武功人, 高级工程师, 主要从事测绘和“3S”技术及应用研究。

$$\alpha_4 \Delta y_k^2 + \alpha_5 \Delta x_k \Delta y_k + \dots + \epsilon_k, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_k &= x_k - \bar{x}_0 \\ \Delta y_k &= y_k - \bar{y}_0 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

式中,  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  为参考点的坐标, 一般取为区域重心坐标;  $x_k, y_k$  为  $P_k$  点的平面坐标, 也可以是大地纬度和大地经度;  $\epsilon_k$  为拟合残差。

对于每一个已知点, 都可以列出以上方程, 按照最小二乘法原理, 在  $\epsilon^2 = \min$  条件下, 求出拟合系数  $\alpha$  为

$$\alpha = (A^T A)^{-1} A^T \xi, \quad (4)$$

式中,  $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$ ;  $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T$ ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta x_1^2 & \Delta y_1^2 & \Delta x_1 \Delta y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta x_2^2 & \Delta y_2^2 & \Delta x_2 \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta x_N & \Delta y_N & \Delta x_N^2 & \Delta y_N^2 & \Delta x_N \Delta y_N \end{bmatrix}.$$

可以看出, 在采用二次曲面拟合时, 至少应有 6 个 GPS 水准联测点, 当少于 6 个时, 则应去掉二次项拟合系数  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \dots$ , 即只能采用平面拟合<sup>[2]</sup>。

在由式(4)求得拟合系数后, 对于任意点  $P_i$  的高程异常为

$$\xi_i = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta x_i + \alpha_2 \Delta y_i + \alpha_3 \Delta x_i^2 + \alpha_4 \Delta y_i^2 + \alpha_5 \Delta x_i \Delta y_i + \dots \quad (5)$$

### 1.3 提高曲面拟合精度的技术措施

用 GPS 结合实测的水准资料, 以二次曲面拟合的方法确定高程异常, 其精度主要取决于已知高程的精度, 以及已知高程 GPS 点的数量和其在测区内的分布情况<sup>[3]</sup>。通过增加已知的高程点数, 提高联测已知点的几何水准精度, 并使所选择的已知高程点在测区内分布均匀, 则能有效提高曲面拟合的精度<sup>[4]</sup>。

另外, 应采取措施提高 GPS 大地高(差)测定的精度, 即观测时应选择最佳的卫星分布, 减弱多路径误差和对流层延迟误差的影响, 改善 GPS 星历精度, 提高天线高的量测误差, 减少接收机天线的相位中心误差等, 这些措施的实施对提高曲面拟合精度都是必要的。

## 2 数学模型的试验验证

### 2.1 测区概况

本试验在陕西省杨凌区城区进行。杨凌城区地形北高南低, 呈二级台塬结构, 台阶上地势平坦, 平均海拔 468 m。

2003-01 根据城镇地籍测量的需要, 在新、老城区范围内全面布设了 GPS 控制网。全网共 39 个控制点, 以其中 2 个已知控制点作为起算点(平面坐标系采用 1954 年北京座标系统), 其余 37 个点为新设控制点, 控制面积为 35 km<sup>2</sup>。GPS 控制网数据采集使用 4 台标称精度为 5 mm + 1 × 10<sup>-6</sup> D (D 为距离) Trimble 4600 L s 单频接收机, 基线解算使用随机软件 GPSurvey 2.35。

GPS 测量实施过程中, 为了提高 GPS 测量精度, 除严格按照规范要求执行外, 还采用了一些必要的技术保证措施, 如测量时将接收机严格对中整平, 对中误差小于 ± 1 mm, 天线指向正北, 天线高从 3 个不同的方向量至 1 mm; 适当延长观测时间; 增加独立基线数, 加强网的结构; 保证一定的重复设站次数<sup>[5]</sup>; 尽量要求每个测站至少与 3 条以上的独立基线相连。通过这些措施保证了各测站具有较高的可靠性, GPS 平面控制网精度达到了四等控制的要求。

杨凌城区高程系统一直采用 1956 年黄海高程系下的正常高系统, 为了应用 GPS 大地高的成果, 本试验在测区范围内布设了具有多个结点的水准网, 并将部分 GPS 点纳入水准网内, 从已知三等水准点开始, 采用经鉴定过的自动安平水准仪按照四等水准测量的要求实施, 最后进行了整网平差。其每 km 高差中数全中误差为 ± 2.1 mm, 精度达到了四等水准测量的要求。

### 2.2 试验结果

选择参与高程拟合的 GPS 点共 8 个, 分别为 G<sub>03</sub>, G<sub>10</sub>, G<sub>15</sub>, G<sub>17</sub>, G<sub>22</sub>, G<sub>24</sub>, G<sub>30</sub>, G<sub>31</sub>, 且按照要求在测区内分布均匀。选择检核的 GPS 点共 14 个, 分别为 G<sub>01</sub>, G<sub>02</sub>, G<sub>04</sub>, G<sub>06</sub>, G<sub>08</sub>, G<sub>12</sub>, G<sub>13</sub>, G<sub>19</sub>, G<sub>23</sub>, G<sub>26</sub>, G<sub>27</sub>, G<sub>33</sub>, G<sub>35</sub>, G<sub>37</sub>, 在测区内分布均匀。杨凌测区重心坐标为  $\bar{x}_0 = 3\ 792\ 968\ 372\ \text{m}$ ,  $\bar{y}_0 = 36\ 507\ 018\ 240\ \text{m}$ 。

将表 1 数据代入(4)式, 算出二次项拟合系数  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ 。然后根据(5)式计算出任意给定已知平面坐标的 GPS 点的高程异常  $\xi_i$ , 最后根据高程异常  $\xi_i$  计算出该点的正常高。对拟合结果进行检验, 结果见表 2, 计算所得的标准差  $\sigma = 1.1\ \text{cm}$ , 说明采用的数学模型精度很高, 此种方法在实际应用中切实可行。根据表 2 作检核点拟合结果互差等值线图, 见图 1。

表 1 二次曲面函数参数计算

Table 1 Computation of twice curved surface function parameter

点名 Call the roll	GPS 大地高/m Geodetic elevation	正常高/m Normal elevation	高程异常/m Elevation abnormality	$x_k - \bar{x}_0$	$y_k - \bar{y}_0$
G03	522.356	522.240	0.116	3.277299	-1.445706
G10	446.123	446.117	0.005	-3.143018	-2.447595
G15	447.754	447.708	0.046	-1.298217	2.120210
G17	440.816	440.776	0.040	-0.831138	0.783747
G22	461.538	461.478	0.060	1.010503	-0.164102
G24	514.692	514.568	0.124	3.336503	0.581918
G30	455.721	455.650	0.071	0.320297	2.098582
G31	459.178	459.171	0.007	-0.484036	-1.1727552

表 2 拟合结果检验计算

Table 2 Inspection calculation of the fit result

点名 Call the roll	检核点正常高/m Inspect normal elevation	拟合高程/m Elevation to fit	互差/cm Differ from mutual
G01	490.725	490.727	-0.2
G02	519.882	519.893	-1.1
G04	489.987	489.991	-0.4
G06	488.454	488.457	-0.3
G08	487.328	487.325	0.3
G12	518.875	518.884	-0.9
G13	485.754	485.749	0.5
G19	486.129	486.123	0.6
G23	461.657	461.643	1.4
G26	444.101	444.083	1.8
G27	460.987	460.976	1.1
G33	517.982	517.994	-1.2
G35	452.879	452.863	1.6
G37	453.578	453.563	1.5
标准差 Standard deviation			1.1

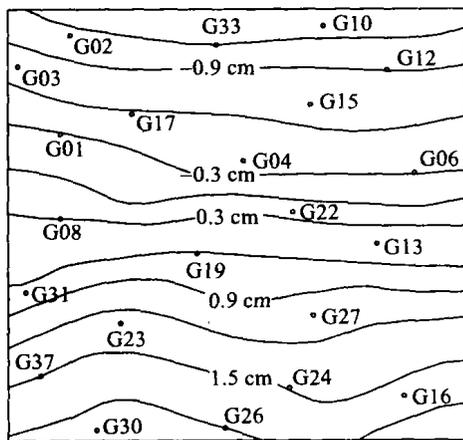


图 1 拟合结果互差等值线图

Fig. 1 Difference from mutual isopleth map with inspection normal elevation and elevation to fit

### 3 结论

1) 本研究结果证明, 采用一定密度及合理分布的 GPS 水准高程联测点, 在面积较大、地势比较平坦的平原区域选择二次曲面函数拟合区域大地水准面, 是平原区域确定正常高的一种行之有效的方法, 具有一定实际意义和实用价值。

2) 对测区内的 14 个 GPS 点进行了拟合结果检验, 计算所得的标准差  $\sigma = 1.1$  cm。证明本研究中所采用的数学模型具有很高的精度, 完全可以应用于具有相似地理特点区域的工程测量。

3) 在测区范围内任意给定 1 个 GPS 点的坐标, 都能利用式 (5) 比较精确的求出该点的正常高, 从而使 GPS 大地高测量成果应用更趋实用化, 其精度可取代传统的等级几何水准测量。

## [参考文献]

- [1] 向虎维. GPS 高程拟合中二次曲面的特征根和高斯曲率[J]. 测绘通报, 1997, (7): 12- 15.
- [2] 高成发, 黄鹤年. GPS 测量[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [3] 徐绍铨, 张华海, 杨志强, 等. GPS 测量原理及应用[M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1998.
- [4] 周忠谟, 易杰军, 周 琪. GPS 卫星测量原理与应用[M]. 北京: 测绘出版社, 1997.
- [5] 刘基余, 李征航, 王跃虎, 等. 全球定位系统原理及其应用[M]. 北京: 测绘出版社, 1999.

## Research on the application of curved surface fit method to determine normal elevation in plain region

GENG Hong-suo<sup>1</sup>, WANG Hong-bin<sup>2</sup>, YIN Yan-ping<sup>1</sup>

(1 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 College of Mechanical and Electronic Engineering, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

**Abstract:** The method of applying GPS technique and data from Geometrical levelling to ascertain normal elevation was discussed in the paper. In view of topographic features of observation zone, proper mathematical model for curved surface fit was selected. Based on this, functions were built to calculate the abnormal and normal elevation of other GPS points. The functions were verified in practical levelling, and the standard deviation of fitted results was 1.1 cm, which met the requirements of fourth-order leveling surveying. Researches have proved that adopting certain density and properly scattered joint-observation points of GPS level elevation, then choosing curved surface function mathematical model is an effective method of determining normal elevation to fit regional geodetic surface.

**Key words:** GPS; geodetic elevation; normal elevation determining