

多目标博弈的模糊求解法^{*}

刘亚相, 孙洪罡, 王丽波, 王乃信

(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 对大系统下的多目标博弈问题进行了研究, 利用模糊数学的层次评价法对多目标博弈的每一个目标函数进行模糊赋权, 然后将多目标收益函数转换为无量纲的收益满意率函数, 并利用模糊赋权将收益满意率函数加权合并, 将多目标博弈问题转化为单目标博弈问题进行求解, 解法更符合实际并简化了算法。该法可以在现代企业综合决策中应用。

[关键词] 多目标博弈; 单目标博弈; 层次分析法; 收益满意率函数

[中图分类号] O 225

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2004)10-0149-04

随着科学技术与社会的发展, 现实中的系统越来越复杂, 往往在一个大系统中又包含若干个子系统。在进行决策时, 仅考虑某一方面的因素已远远不足以解决问题, 通常要进行多因素多目标的综合考虑, 这也就使决策问题从单目标决策向多目标决策发展。同样, 对于博弈论^[1,2]的应用, 也从单目标博弈问题转向大系统的多目标博弈问题。丁协平^[3]对国内外的受约束的局部凸 H -空间多目标博弈问题进行了归纳总结, 李登峰^[4]对多目标零和博弈进行了研究, 并得出了关于多目标零和博弈的模糊解法。鉴于目前博弈理论欠完善, 对单目标博弈问题解决得不够完美, 并且对多目标博弈问题的解决方法也很少, 作者对一般意义下的多目标博弈问题进行了研究, 利用模糊数学的层次评价法^[5,6]对多目标博弈问题的每一个目标函数进行模糊赋权, 进而将多目标博弈问题转换为单目标博弈问题进行求解, 从而简化了算法。

1 多目标博弈模型假设

设策略型多目标博弈为 $G(S_1, S_2, \dots, S_k; U_1, U_2, \dots, U_k)$, 其中, S_i 为博弈方 i 的决策空间, $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})'$ 表示博弈方 i 的 n 个目标收益函数。

2 模型求解方法

2.1 对每个博弈方的多个目标进行模糊赋权

为了使多目标博弈问题转换为单目标博弈问

题, 利用模糊数学的层次评价法分别对每一个博弈方的多个目标进行模糊赋权。

以第 k 个博弈方为例, 首先确立其目标间的重要性。第 i 个目标与第 j 个目标之间的重要性比较标度如下:

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{目标 } i \text{ 对目标 } j \text{ 同等重要} \\ 3 & \text{目标 } i \text{ 对目标 } j \text{ 稍微重要} \\ 5 & \text{目标 } i \text{ 对目标 } j \text{ 明显重要} \\ 7 & \text{目标 } i \text{ 对目标 } j \text{ 强烈重要} \\ 9 & \text{目标 } i \text{ 对目标 } j \text{ 极端重要} \end{cases}$$

注意, $v_{ij} = 1/v_{ji}$; 若重要性在两类间可以用 2, 4, 6, 8 来表示, 例如若重要性介于同等重要与稍微重要之间, 则重要性比较标度为 2。

将各个目标全部进行对比、定值, 得出由第 k 个博弈方目标间重要性比较标度值构成的矩阵 R_k 。

$$R_k = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

对于不同的博弈方, 不同目标间重要性比较标度值构成的矩阵 R 一般不同, 这就需结合以往的信息尽可能地将 R 确定准确。若 R 中的标度值没有矛盾(例如目标 1 比目标 2 重要, 目标 2 比目标 3 重要, 而目标 3 又比目标 1 重要, 这就是矛盾), 则有:

^{*} [收稿日期] 2004-03-05

[基金项目] 西北农林科技大学青年教师科研专项基金资助(0450A 6)

[作者简介] 刘亚相(1962-), 男, 陕西扶风人, 副教授, 博士, 主要从事经济管理数学方法研究。

$$RW = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_n \end{bmatrix}$$

其中, $W = (W_1, W_2, \cdots, W_n)$ 为 R 的特征向量, λ 为 R 的特征值。通常将最大特征值 $\lambda_{\max}$ 所对应的特征向量进行标准化后得 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_n)$, (其中 $\sum_{i=1}^n W_i = 1$)。以 W 的各个分量 W_i 作为目标 i 的权重。

为了分析权重分布的合理性和可靠度, 模糊数学理论提供了对 R 进行一致性检验的方法。其使用的公式为:

$$CR = CI/RI$$

式中, $CI = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$, 为判断矩阵 R 的一致性指标; RI 为判断矩阵 R 的随机一致性指标, 可由 RI 值表查得。当 CR 值小于 0.1 时, 可认为 R 具有较优的一致性, 说明赋权合理; 否则就需要调整判断矩阵, 直到获得满意的一致性指标为止。

同理, 对其余各个博弈方的多目标进行赋权。

2.2 每个博弈方的多个目标收益函数转化为多个目标收益的满意率函数

对每个博弈方的多个目标收益函数进行转化, 主要是为了消除量纲, 为下一步的加权合并作准备。收益满意率函数即在决策者的决策空间内, 将目标函数除以决策空间内的极大值后所得的函数。显然, 当目标收益为一个时, 目标收益满意率极大化等价于决策者理性收益最大化。

以第 i 个博弈方为例, 对其目标收益函数进行归一化。

首先求得第 i 个博弈方每一个目标收益函数 u_{ik}

($k = 1, 2, \cdots, n$) 在策略空间 S_i 上的极大值 $\max u_{ik}$ 得:

$$\max U_i = (\max u_{i1}, \max u_{i2}, \cdots, \max u_{in})'$$

令

$$u'_{ik} = \frac{u_{ik}}{\max u_{ik}} (k = 1, 2, \cdots, n)$$

得目标收益满意率函数:

$$U_i' = (u'_{i1}, u'_{i2}, u'_{in})'$$

同理, 对其余各个博弈方的多目标收益函数转化可得新收益的满意率函数 (U_1', U_2', U_n') 。

2.3 加权合并各个博弈方目标满意率函数

对前二步所得各个博弈方的模糊赋权值及目标收益的满意率函数进行加权合并, 使其成为单目标收益满意率函数, 进而形成单目标博弈。

仍以第 i 个人为例, 其最终的目标收益函数变为 $V_i = W_{i1}u'_{i1} + W_{i2}u'_{i2} + \cdots + W_{in}u'_{in}$ 。

2.4 单目标博弈求解

至此, 原多目标博弈 G 转变为单目标博弈 G' ($S_1, S_2, \cdots, S_n; V_1, V_2, \cdots, V_n$), 其中 S_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 仍然为第 i 个博弈方的策略空间, V_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 为由多目标收益函数转变而来的第 i 个博弈方的单目标收益满意率函数。现在, 对博弈 G 求解则可得到原博弈 G 的决策方案。

3 实例分析

假如有两家制药行业的高新技术企业在市场上销售一种可替代的新药品, 假定两家企业需要在药品的科技投入、广告宣传和扩大生产方面进行竞争, 厂商可以拿出现有资金的几种比例方案对这 3 方面共同投资, 结合以往经验及分析预测分别可得如下 3 个博弈矩阵。

表 1 科技节约成本博弈矩阵

Table 1 The game theory's matrix of sci-tech saving cost

甲厂 First enterprise	乙厂 Second enterprise		
	40%	50%	60%
40%	5, 2.5	5, 5	5, 7.5
50%	7.5, 2.5	7.5, 5	7.5, 7.5

表 2 广告投入后市场影响率博弈矩阵

Table 2 The game theory's matrix of the market influence after ad investment

甲厂 First enterprise	乙厂 Second enterprise		
	40%	50%	60%
40%	20, 30	15, 40	12.5, 45
50%	25, 25	20, 30	17.5, 40

表 3 扩大生产后所得利润博弈矩阵

Table 3 The game theory's matrix of profit after production enlargement

甲厂 First enterprise	乙厂 Second enterprise		
	40%	50%	60%
40%	30, 28	<u>35, 30</u>	30, 25
50%	35, 22	30, 25	20, 20

从上面 3 个博弈矩阵中可以看到, 甲厂有 2 个投资方案, 即投入现有资金的 40% 或 50%; 乙厂有 3 个投资方案, 即投入现有资金的 40%, 50% 或 60%。每一个竞争目标都有一个纯策略的纳什均衡, 分别用下划线标出。下面对多目标博弈以甲厂为例进行模糊求解。求得甲厂的目标间重要性比较标度值构成的矩阵 R 如下:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

求得 R 的最大特征值为 $\lambda = 3.038$, 其对应的标准化后特征向量为 $w = (0.258, 0.104, 0.637)$ 。对 R 进行一致性检验, 计算 $CI = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1) = (3.038 - 3)/(3 - 1) = 0.019$ 。当 $n = 3$ 时, RI 值为 0.58。则 $CR = CI/RI = 0.019/0.58 = 0.025 < 0.1$, 说明甲厂的目标间重要性比较标度值构成的矩阵构建较好, 通过一致性检验。

对甲厂的 3 个收益矩阵转化成收益满意率矩阵, 即分别除以矩阵的最大值, 得到如下 3 个矩阵。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 & 0.667 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

表 4 模糊加权后收益满意率博弈矩阵

Table 4 The game theory's matrix of satisfied income with fuzzy power

甲厂 First enterprise	乙厂 Second enterprise		
	40%	50%	60%
40%	0.862, 0.687	0.872, 0.887	0.770, 0.962
50%	1, 0.554	0.888, 0.705	0.696, 0.851

从上面的最终收益矩阵中也可以得到一个纯策略的纳什均衡, 即甲厂投入现有资金的 40%, 而乙厂投入现有资金的 60%; 甲厂的收益满意率为 77.0%, 乙厂的收益满意率为 96.2%。最终这个纳什均衡, 就是原多目标博弈问题转换成单目标博弈问题后所得的解。可以看出, 最后的纳什均衡与原博弈的 3 个纳什均衡均不同, 这也正是将多目标博弈问题转换成单目标博弈问题的意义之一, 即单目标利益最大化未必能保证整体多目标利益最大化, 只有将多个目标进行模糊赋权合并成一个单目标的综合问题, 才能保证整体利益最大化。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.857 & 1 & 0.857 \\ 1 & 0.857 & 0.571 \end{bmatrix}$$

加权合并甲厂收益满意率矩阵:

$$A = 0.258A_1 + 0.105A_2 + 0.637A_3 = \begin{bmatrix} 0.862 & 0.872 & 0.770 \\ 1 & 0.888 & 0.696 \end{bmatrix}$$

同理, 对乙厂以如下的目标间重要性比较标度值构成的矩阵 R 进行赋权、一致性检验和目标矩阵转化, 并加权合并乙厂收益满意率矩阵。

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

加权合并乙厂收益满意率矩阵得:

$$B = \begin{bmatrix} 0.687 & 0.887 & 0.962 \\ 0.554 & 0.705 & 0.851 \end{bmatrix}$$

最后, 将 2 个厂的加权合并转化后的收益满意率矩阵写成一个矩阵, 见表 4。

4 结论分析

作者对大系统下的多目标博弈问题进行了研究, 利用模糊数学的层次评价法对多目标博弈问题的每一个目标收益函数进行模糊赋权, 然后将收益函数转换为收益满意率函数, 并利用模糊赋权将收益满意率函数加权合并, 将多目标博弈问题转化为单目标博弈问题, 是针对多目标博弈问题综合求解的一种有效的解法, 且解法更加符合实际并简化了算法。在实际问题中, 最后求得的单目标博弈问题很可能没有纯策略纳什均衡, 到时可以对其求得混合

策略下的纳什均衡策略。多目标博弈问题目标间的量纲一般是不相同的,简单相加是没有意义的(如本文例子),运用模糊数学的层次评价法就可以较好地解决此类问题,因为最终转化为单目标博弈问题后的收益函数已经变成没有量纲的收益满意率函数。

若系统更为复杂,子系统中还包含子系统时,可利用层次评价法对每一个子系统进行赋权,然后对最底层的子系统逐层赋权合并,直至将多目标博弈问题转化为单目标博弈问题。

[参考文献]

- [1] 施锡铨 博弈论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2000
- [2] 刘亚相, 孙洪罡, 王乃信 少数者博弈模型的最小二乘解法[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2003, 31(1): 151- 154
- [3] Ding Xie-ping. Constrained multiobjective games in locally convex H -spaces[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(5): 499-508
- [4] 李登峰 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003
- [5] 李金华 模糊数学方法与统计赋权[J]. 数量经济技术经济研究, 2000, (10): 34- 38
- [6] 赵天翔, 李晓丽 高新技术创业企业的成长性评价[J]. 华北电力大学学报, 2003, (1): 31- 34

Fuzzy solution in multiobjective games

L IU Ya-xiang, SUN Hong-gang, WANG Li-bo, WANG Na-i-xin

(College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: To solve the problem of multiobjective games, this paper presents a fuzzy solution based on AHP (analytic hierarchy process). According to the algorithm of AHP, we gave each aim function of multiobjective games a fuzzy power. Then we switched the multiobjective income functions to the satisfied income coefficient functions without dimension, and we used fuzzy power to add up all of the the satisfied income coefficient functions. Last, we translate the multiobjective games into simple game question. This solution is better for use and it is simpler to figure. This theory can be used in modern enterprise decision-making.

Key words: multiobjective games; simple game; AHP; satisfied income coefficient

(上接第 148 页)

Relation between R_0 -algebras and MV-algebras

SU Ren-suo

(Department of Math, Baoji University of Arts and Science, Baoji, Shaanxi 721007, China)

Abstract: Some additional conditions of residual lattice or regular residual lattice are proved to be equivalent to each other. The concept of normal residual lattice is introduced and some properties of normal residual lattice are given. Moreover, the relation between R_0 -algebra and MV-algebra has been discussed.

Key words: residual lattice; regular residual lattice; normal residual lattice; sub-BL-algebra; MV-algebra; weak R_0 -algebra