第 32 卷　第 10 期　　西北农林科技大学学报(自然科学版)　　Vol. 32 No. 10
2004 年 10 月　　Jour. of Northwest Sci-Tech Univ. of Agri. and For. (Nat. Sci. Ed.)　　Oct. 2004

R_0-代数与 MV-代数的关系*

苏忍锁

(宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007)

[摘　要]　证明了剩余格和正则剩余格中一些典型的附加条件之间的等价性, 引入了正规剩余格的概念并给出了其若干性质。以此为基础, 讨论了 R_0-代数和 MV-代数之间的关系。

[关键词]　剩余格; 正则剩余格; 正规剩余格; 次 BL-代数; MV-代数; 弱 R_0-代数

[中图分类号]　O141.1　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1671-9387(2004)10-0145-04

在非经典逻辑中, 由 Pavelka J 引入的剩余格是一种非常重要而基本的代数结构, 也是当今较为流行的理论与方法。由 Chang C C 提出的 MV-代数, 以及由我国学者王国俊教授首先提出的 R_0-代数[1,2], 都是基于剩余格的逻辑代数系统。作者对剩余格中的一些附加条件作了进一步讨论, 引入了正规剩余格的概念, 指出 MV-代数与正规剩余格是等价的代数系统, 并在此基础上讨论了 R_0-代数与 MV-代数的关系。

1　预备知识

这一部分主要给出剩余格的一些概念和性质。

定义 1[1]　设 P 是偏序集, $\otimes$ 与 $\to$ 为 P 上的二元运算。如果满足条件:

(R1) $\otimes: P\times P\to P$ 关于两个变量都是单调递增的;

(R2) $x\otimes y\le z$, 当且仅当 $x\le y\to z$, $x, y, z\in P$;

(R3) $\to: P\times P\to P$ 关于第一个变量不增, 关于第二个变量不减。

则称 $\otimes$ 与 $\to$ 互为伴随, $(\otimes, \to)$ 叫 P 上的伴随对。

定义 2[1]　设 $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ 为有界格, $\otimes$ 与 $\to$ 为 L 上的二元运算。$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 叫剩余格, 如果下列条件成立:

(R4) $(L, \otimes, 1)$ 是以 1 为单位元的交换半群;

(R5) $(\otimes, \to)$ 是 L 上的伴随对。

定义 3[3]　设 $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 为剩余格, 定义 L 上的一元运算 $(\ )': L\to L$ 如下:

(R6) $x' = x\to 0$, $x\in L$

称为 L 上的伪补运算。剩余格 $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为正则的, 如果下述条件成立:

(R7) $x'' = (x')' = x$, $x\in L$

命题 1[1,3,4]　设 $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 为剩余格, $x, y, z\in L$, 则以下性质成立:

(R8) $x = 1\to x$;

(R9) $x\le y$, 当且仅当 $x\to y = 1$, 特别的, $x\to x = 1$;

(R10) $x\to(y\to x) = 1$;

(R11) $x\to(y\to z) = y\to(x\to z)$;

(R12) $x\to y\le(y\to z)\to(x\to z)$;

(R13) $x\to y\le(z\to x)\to(z\to y)$;

(R14) $x\vee y\le((x\to y)\to y)\wedge((y\to x)\to x)$;

(R15) $x\otimes y\to z = x\to(y\to z)$;

(R16) $x\otimes(y\vee z) = (x\otimes y)\vee(x\otimes z)$;

(R17) $x\vee y\to z = (x\to z)\wedge(y\to z)$;

(R18) $x\to y\wedge z = (x\to y)\wedge(x\to z)$。

命题 2[3,5]　设 $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 为正则剩余格, $x, y, z\in L$, 则以下性质成立:

(R19) $x\le y$, 当且仅当 $y'\le x'$;

(R20) $x\to y = y'\to x'$;

(R21) $x\otimes y = (x\to y')'$;

(R22) $x\to y = (x\otimes y')'$;

(R23) $(x\vee y)' = x'\wedge y'$;

(R24) $(x\wedge y)' = x'\vee y'$。

设 $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 为剩余格, $x, y, z\in L$。在本文中, 还将考虑以下各附加条件:

(R25) $(x\to y)\to y = (y\to x)\to x$;

(R26) $x\vee y = (x\to y)\to y$;

---

* [收稿日期]　2004-04-30
[基金项目]　国家自然科学基金资助项目(19831040)
[作者简介]　苏忍锁(1964-), 男, 陕西宝鸡人, 讲师, 在读硕士, 主要从事数学中非经典数理逻辑与近似推理研究。

(R 27) $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$;

(R 28) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$;

(R 29) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

(R 30) $x \wedge y \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$。

由命题 1 和命题 2 容易得到下面引理。

引理 1 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为剩余格, $x, y, z \in L$, 则有:

(R 31) $x \vee y \to x = y \to x$;

(R 32) $x \vee y \to y = x \to y$;

(R 33) $x \to x \wedge y = x \to y$;

(R 34) $y \to x \wedge y = y \to x$;

(R 35) $(y \to z) \otimes (x \to y \vee z) \leq x \to z$;

(R 36) $(z \to y) \otimes (x \to y \vee z) \leq x \to y$;

(R 37) $x \wedge y \leq (x \wedge y \to z) \to z$。

定理 1 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为剩余格, $x, y \in L$, 则 (R 25) 与 (R 26) 等价, 且 (R 26) 蕴涵 (R 27)。若$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为正则剩余格, 则 (R 26) 与 (R 27) 等价。

证明 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为剩余格, $x, y \in L$。下面来证 (R 25) 与 (R 26) 等价, 且 (R 26) 蕴涵 (R 27)。

(1) (R 25) 蕴涵 (R 26)。

设 (R 25) 成立, 由 (R 9) 知, $1 = y \to x \vee y$, 于是由 (R 8), (R 25), (R 32) 得:

$$x \vee y = 1 \to x \vee y = (y \to x \vee y) \to x \vee y = (x \vee y \to y) \to y = (x \to y) \to y$$

即 (R 26) 成立。

(2) (R 26) 蕴涵 (R 25)。

设 (R 26) 成立, 则有 $x \vee y = (x \to y) \to y$, $y \vee x = (y \to x) \to x$。故由 $x \vee y = y \vee x$ 知, $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$, 即 (R 25) 成立。

(3) (R 26) 蕴涵 (R 27)。

设 (R 26) 成立, 由 (R 26) 知, $x = x \vee 0 = (x \to 0) \to 0 = x''$, 即 (R 7) 成立, 因此 L 为正则剩余格。于是由 (R 23), (R 26), (R 20) 和 (R 21) 得:

$$x \wedge y = y \wedge x = (y' \vee x')' = ((y \to x') \to x')' = ((x \to y) \to x')' = (x \to y) \otimes x = x \otimes (x \to y)$$

即 (R 27) 成立。

现设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为正则剩余格, $x, y \in L$。下面来证 (R 26) 与 (R 27) 等价, 为此只需证 (R 27) 蕴涵 (R 26)。

设 (R 27) 成立, 则由 (R 24), (R 27), (R 21) 和 (R 20) 得:

$$x \vee y = y \vee x = (y' \wedge x')' = (y' \otimes (y' \to x'))' = y' \to (y' \to x')' = (y \to x) \to y = (x \to y) \to y$$

即 (R 26) 成立。

推论 1 在正则剩余格中, (R 25), (R 26), (R 27) 两两等价。

定理 2[6] 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为剩余格, $x, y, z \in L$, 则 (R 28), (R 29), (R 30) 两两等价。

定理 3 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为正则剩余格, $x, y \in L$, 则 (R 26) 蕴涵 (R 28)。

证明 设 (R 26) 成立。由 (R 32), (R 31), (R 20), (R 11), (R 26) 和 (R 24) 得:

$$(x \to y) \to (y \to x) = (x \vee y \to y) \vee (x \vee y \to x) = (y' \to (x \vee y)')\to(x' \to (x \vee y)') = x' \to [(y' \to (x \vee y)') \to (x \vee y)'] = x' \to [y' \vee (x \vee y)'] = x' \to [y \wedge (x \vee y)]' = x' \to y' = y \to x$$

即 $(x \to y) \to (y \to x) = y \to x$。

由 (R 9) 得 $[(x \to y) \to (y \to x)] \to (y \to x) = 1$, 再由 (R 26) 知 $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, 即 (R 28) 成立。

2 正规剩余格与 MV -代数

定义 4 剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$称为正规的, 如果 (R 25) 成立。

定理 4 正规剩余格一定是正则的。

证明 由 (R 25) 可得, $x'' = (x \to 0) \to 0 = (0 \to x) \to x = 1 \to x = x$, 即 (R 25) 蕴涵 (R 7)。

由此知, 正规剩余格一定是正则的。

定理 5 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为正规剩余格, 则 (R 25)～(R 30) 都成立。

证明 由定理 1 的推论 1, 定理 2, 定理 3 以及定理 4 即知。

设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为剩余格, 如果$(L, \vee, \wedge)$还是分配格, 则称$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为分配的剩余格。

定义 5[7] 次 BL -代数$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个分配的剩余格, 且满足 (R 28) 式。

定理 6 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个次 BL -代数, 则 (R 28)～(R 30) 都成立。

证明 由定理 2 即知。

定义 6[8] BL -代数$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个剩余格, 且满足 (R 27) 和 (R 28) 式。

注 1[4, 8] BL -代数一定是分配格, 从而一定是次 BL -代数。

定义 7[7] MV -代数$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个剩余格, 且满足 (R 27), (R 28) 和 (R 7)。

由定义 6 和定义 7 易得下面命题。

命题 3　MV-代数一定是BL-代数。

BL-代数是MV-代数, 当且仅当它是正则剩余格。

定理 7　剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是MV-代数, 当且仅当它是正规剩余格。

证明　设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是MV-代数, 则(R27), (R28)和(R7)成立, 于是由定理 1 的推论 1 知(R25)成立。所以, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是正规剩余格。反之, 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是正规剩余格, 则由定理 4 和定理 5 知, (R27), (R28)和(R7)都成立。所以由定义 7 知, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是MV-代数。

推论 2　MV-代数一定是正则剩余格。

推论 3　剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是MV-代数, 当且仅当它满足(R26)。

证明　由定理 7 与定理 1 即知。

定理 8　正则剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是MV-代数, 当且仅当它满足(R26)或(R27)。

证明　由定理 7 与定理 1 的推论 1 即知。

3　弱R_0-代数与R_0-代数

定义 8[1, 9]　设L 是$(\neg, \vee, \to)$型代数, 如果L 上有偏序$\leq$使$(L, \leq)$成为有界分配格, 且$\vee$是关于序$\leq$的上确界运算, $\neg$ 是关于序$\leq$的逆序对合对应, 且满足:

(1) $\neg y \to \neg x = x \to y$;

(2) $1 \to x = x, x \to x = 1$;

(3) $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$;

(4) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(5) $x \to y \vee z = (x \to y) \vee (x \to z)$;

(6) $x \to y \wedge z = (x \to y) \wedge (x \to z)$。

这里 1 是$(L, \leq)$的最大元, 则称L 为一个弱R_0-代数。

定义 9[1, 2]　R_0-代数L 是一个弱R_0-代数, 且满足:

(R38) $(x \to y) \vee ((x \to y) \to \neg x \vee y) = 1, x, y \in L$。

注 2　[2]中证明了若在弱R_0-代数L 中, 按(R21)式引入二元算子$\otimes$, 则$(L, \otimes, 1)$是以 1 为单位元的交换群, 且$(\otimes, \to)$是伴随对。因此, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$成为剩余格。

更进一步有:

命题 4　设L 是一个弱R_0-代数, $\otimes$按(R21)式定义, 则$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是正则剩余格, 且$\neg x = x \to 0, x \in L$。

证明　由注 2 知, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是剩余格。由定义 8 的(1), (2)可得:

$x \to 0 = \neg 0 \to \neg x = 1 \to \neg x = \neg x$。

再由$\neg$为逆序对合对应知, $x^{\prime\prime} = \neg\neg x = x$, 即(R7)式成立。所以, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是正则剩余格。

命题 5　设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是分配的正则剩余格且满足(R29), 则$L$ 是弱R_0-代数。

证明　在L 上定义一元运算$\neg$如下: $\neg x = x \to 0, x \in L$, 则$\neg$为$L$ 上的逆序对合对应。由命题 2 的(R20)以及命题 1 的(R8), (R9), (R13), (R11)和(R18)知:

定义 8 的条件(1), (2), (3), (4)和(6)成立。再由(R29)知定义 8 的条件(5)成立。所以, $(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个弱$R_0$-代数。

由命题 4 和命题 5 易得:

推论 4　正则剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个弱$R_0$-代数, 当且仅当它是分配格且满足(R29)。

由此得到弱R_0-代数的基于剩余格的又一等价形式的定义。

定义 8′　弱R_0-代数$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个分配的正则剩余格, 且满足(R29)。

由定理 2 知, 定义 9 又等价于如下形式的定义。

定义 8″　弱R_0-代数$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个分配的正则剩余格, 且满足(R28)。

由定义 9′易知下述命题成立。

定理 9　正则剩余格$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$是一个弱$R_0$-代数, 当且仅当它是一个次BL-代数。

推论 5　MV-代数是一个弱R_0-代数。

证明　由命题 3 知MV-代数是BL-代数, 因而是次BL-代数。又由推论 2 知,MV-代数是一个正则剩余格。于是由定理 9 知,MV-代数是一个弱R_0-代数。

4　R_0-代数与MV-代数的关系

由上面讨论可知, R_0-代数即满足(R38)的弱R_0-代数, 而MV-代数就是满足(R27)的弱R_0-代数。可见,MV-代数与R_0-代数的本质差别体现在(R27)和(R38)两式上。在本文的最后部分进一步讨论MV-代数与R_0-代数之间的关系。

引理2 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为MV-代数, $x, y \in L$, 则有:

(R39) $(x \to y) \to x' = x' \vee y'$;

(R40) $x \to y \geq x' \vee y$。

证明 (1) 因MV-代数是正规剩余格, 故(R19)～(R30)都成立。于是由(R20), (R21), (R27)和(R24)得:

$(x \to y) \to x' = x \to (x \to y)' = (x \otimes (x \to y))' = (x \wedge y)' = x' \vee y'$

即(R39)成立。

(2) 在一般剩余格中证明(R40)成立。

事实上, 由(R3)知$x \to y \geq x \to 0 = x'$。又由(R9)和(R10)知$y \leq x \to y$。所以, $x \to y \geq x' \vee y$。

定理10 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为MV-代数, 则$L$是$R_0$-代数, 当且仅当

(R41) $(x \to y) \vee (x \vee y)' = 1$, $x, y \in L$。

证明 设$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$为MV-代数, 则由(R29), (R39), (R26)和(R40)得:

$(x \to y) \vee ((x \to y) \to x' \vee y) = (x \to y) \vee (((x \to y) \to x') \vee ((x \to y) \to y)) = (x \to y) \vee (x' \vee y') \vee (x \vee y) = [(x \to y) \vee (x' \vee y)] \vee (x \vee y)' = (x \to y) \vee (x \vee y)'$。

由此知, 在MV-代数中(R38)成立, 当且仅当(R41)成立。

因MV-代数是弱R_0-代数, 故它是R_0-代数, 当且仅当(R38)成立, 当且仅当(R41)成立。

推论6 若$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$既是MV-代数, 又是$R_0$-代数, $x \in L$, 则有:

(R42) $(x \to x') \vee x = 1$;

(R43) $(x' \to x) \vee x' = 1$。

证明 在(R41)中取$y = x$即得(R42), 由(R42)直接可得(R43)。

命题6 若L是全序的MV-代数又是R_0-代数, 则$|L| \leq 3$。这里$|L|$表示L的元素个数。

证明 首先证明, 对任意的$x \in L$, 有$x = 0$, $x = 1$或者$x = x'$。

若$x \neq 0$, 且$x \neq 1$, 则由(R42)和(R43)知: $x \to x' = 1$, $x' \to x = 1$。于是由(R9)知, $x \leq x'$, 且$x' \leq x$。所以, $x = x'$。

其次证明, L中满足$x = x'$的元素最多只能有一个。

设$y = y'$, $z = z'$, 来证$y = z$。因L是全序集, 不妨设$y \leq z$, 则有$y = y \wedge z$, $z = y \vee z$。于是$y = y' = (y \wedge z)' = y' \vee z' = y \vee z = z$。

综上讨论, L中除0和1之外, 最多再含有一个元。所以, $|L| \leq 3$。

推论7 设$L = [0, 1]$, 则$(L, \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$不能同时是MV-代数和$R_0$-代数。特别的, MV-单位区间[2]不是$R_0$-代数, R_0-单位区间[2]也不是MV-代数。

5 结束语

为叙述方便, 引入一些记号如下:

RL为全体剩余格之集; CRL为所有全序的剩余格之集; RRL为全体正则剩余格之集; NRL为全体正规剩余格之集; $SBAL$为全体次BL-代数之集; BLA为全体BL-代数之集; MVA为全体MV-代数之集; WR_0A为全体弱R_0-代数之集; R_0A为全体R_0-代数之集。

由本文讨论的结果易知:

(1) $NRL = MVA = RRL \cap BLA$;

(2) $WR_0A = RRL \cap SBLA$;

(3) $R_0A \subset WR_0A$, $WVA \subset WR_0A$;

(4) 若$L \in CRL \cap R_0A \cap WVA$, 则$|L| \leq 3$。

[参考文献]

[1] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2003.

[2] 王国俊. 数理逻辑与归结原理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[3] 裴道武. 剩余格与正则剩余格的特征定理[J]. 数学学报, 2002, 45(2): 271-278.

[4] Turunen E. Mathematics behind fuzzy logic[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999.

[5] 王国俊. L-fuzzy拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

[6] HDohle U. Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[7] 傅 丽. 次BL-代数的推理系统[J]. 陕西师范大学学报, 2002, 30(1): 17-21.

[8] 王国俊. MV-代数、BL-代数、R_0-代数与多值逻辑[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 1-15.

[9] 裴道武. R_0-代数公理系统的简化与独立性[J]. 陕西师范大学学报, 2002, 30(3): 5-9.

(下转第152页)

策略下的纳什均衡策略。多目标博弈问题目标间的量纲一般是不相同的,简单相加是没有意义的(如本文例子),运用模糊数学的层次评价法就可以较好地解决此类问题,因为最终转化为单目标博弈问题后的收益函数已经变成没有量纲的收益满意率函数。若系统更为复杂,子系统中还包含子系统时,可利用层次评价法对每一个子系统进行赋权,然后对最底层的子系统逐层赋权合并,直至将多目标博弈问题转化为单目标博弈问题。

[参考文献]

[1] 施锡铨. 博弈论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2000.

[2] 刘亚相, 孙洪罡, 王乃信. 少数者博弈模型的最小二乘解法[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2003, 31(1): 151-154.

[3] Ding Xie-ping. Constrained multiobjective games in locally convex H-spaces[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(5): 499-508.

[4] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.

[5] 李金华. 模糊数学方法与统计赋权[J]. 数量经济技术经济研究, 2000, (10): 34-38.

[6] 赵天翔, 李晓丽. 高新技术创业企业的成长性评价[J]. 华北电力大学学报, 2003, (1): 31-34.

Fuzzy solution in multiobjective games

LIU Ya-xiang, SUN Hong-gang, WANG Li-bo, WANG Nai-xin

(*College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract: To solve the problem of multiobjective games, this paper presents a fuzzy solution based on AHP (analytic hierarchy process). According to the algorithm of AHP, we gave each aim function of multi-objective games a fuzzy power. Then we switched the multiobjective income functions to the satisfied income coefficient functions without dimension, and we used fuzzy power to add up all of the the satisfied income coefficient functions. Last, we translate the multiobjective games into simple game question. This solution is better for use and it is simpler to figure. This theory can be used in modern enterprise decision-making.

Key words: multiobjective games; simple game; AHP; satisfied income coefficient

(上接第148页)

Relation between R_0-algebras and MV-algebras

SU Ren-suo

(*Department of Math, Baoji University of Arts and Science, Baoji, Shaanxi* 721007, *China*)

Abstract: Some additional conditions of residual lattice or regular residual lattice are proved to be equivalent to each other. The concept of normal residual lattice is introduced and some properties of normal residual lattice are given. Moreover, the relation between R_0-algebra and MV-algebra has been discussed.

Key words: residual lattice; regular residual lattice; normal residual lattice; sub-BL-algebra; MV-algebra; weak R_0-algebraebra