

平均断面法计算渠道土方量的本质缺陷及改进^{*}

王 铭¹, 宋天峰¹, 罗阳军²

(1 西北勘测设计研究院, 陕西 西安 710065;

2 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 对传统的渠道土方计算使用的平均断面法进行了详细分析。针对该方法的本质缺陷, 提出了运用二次B-样条函数拟合渠道填方或挖方断面面积函数, 再结合样条积分公式来计算土方量的渠道土方计算方法, 并通过实例对该算法的实用性及优越性进行了说明。

[关键词] 渠道土方计算; 平均断面法; 二次B-样条函数

[中图分类号] TU 201.7

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2004)09-0119-05

渠道土方计算在渠道设计中是一项必要而烦琐的工作, 找出一种精度足够、规则的渠道土方计算方法对于提高设计效率 and 设计质量具有深远的影响。迄今为止, 渠道土方计算的核心方法是平均断面法, 该方法简单明了, 便于计算, 但其计算结果误差太大。一般认为该方法误差约5%, 最大可达10%^[1]。自20世纪90年代以来, 由于土方工程的高速发展, 我国学者在提高精度、改进公式方面进行了大量的探讨, 提出了方格网法、面积重心法、数值法等一系列方法^[2~4]。这些方法在一定程度上减小了平均断面法的计算误差, 但均没有准确分析出传统方法的本质缺陷及误差来源。本研究通过对渠道土方使用的平均断面法的详细分析, 找出了该方法的本质缺陷及误差来源, 并针对该方法的本质缺陷, 提出了运用二次B-样条函数拟合渠道填方或挖方断面面积函数, 再结合样条积分公式来计算土方量的渠道土方计算方法。

1 平均断面法的本质缺陷

平均断面法的表达式为

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n (A_{i-1} + A_i) L_i / 2, \quad (1)$$

式中, A_{i-1} , A_i 分别为第 i 单元渠段起终断面的填(或挖)方面积; L_i 为渠段长; V_i 为填(或挖)方体积。

式(1)计算误差较大。在计算体为棱锥体情况下, 即两端计算面积分别为 A 和 0, 渠段长为 L , 实际土方量为 $AL/3$, 计算土方量却为 $AL/2$, 相对误差达到了50%。

进一步取半挖半填的单元渠段进行分析。设在分析渠段内, 渠长为 l , 渠底宽为 b , 渠堤宽为 D , 渠道内边坡系数为 m , 填方渠道外边坡系数为 n , 渠道比降为 i , 渠槽深为 H , 渠段首端地面高程为 h_0 , 渠段尾端地面高程为 h_1 , 取坐标 loh , 原点取在首端渠底中线处, 如图1所示。

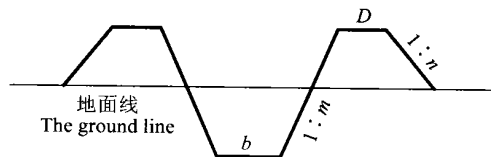
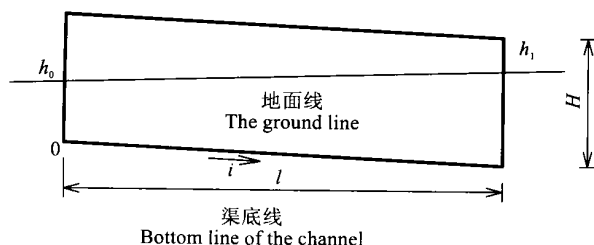


图1 渠道纵、横断面图

Fig 1 Vertical and cross section of the channel

* [收稿日期] 2004-03-01

[作者简介] 王 铭(1977-), 男, 四川资中人, 助理工程师, 硕士, 主要从事水工结构研究。E-mail: coo@wangn.ing@163.com

令 $\frac{h_1 - h_0}{L} = k$, 则

$$h(l) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L}l = h_0 + kl$$

$$\begin{aligned} A_{\text{挖}}(l) &= b[h(l) - h_{\text{底}}(l)] + m[h(l) - h_{\text{底}}(l)]^2 \\ &= b[h_0 + (k + i)l] + m[h_0 + (k + i)l]^2 \\ &= (bh_0 + mh_0^2) + (b + 2m h_0)(k + i)l + m(k + i)^2 l^2; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{填}}(l) &= 2D(H - h_0 - kl - il) + (m + n)(H - h_0 - kl - il)^2 \\ &= 2D(H - h_0) + (m + n)(H - h_0)^2 - 2[D + (m + n)(H - h_0)](k + i)l + (m + n)(k + i)^2 l^2. \quad (3) \end{aligned}$$

由(2), (3)式可知, 在地面线为直线的情况下, 两相邻断面间的断面填挖方面积是渠长的凹曲线函数, 均随渠道长度呈非线性变化, 而平均断面法用线性插值计算, 以线性表达式表达非线性的断面填挖面积, 这是平均断面法计算渠道土方产生模型误差的根本原因。

2 二次B-样条函数拟合法

当地面线为直线时, 断面填挖面积函数是关于 L 的二次曲线, 故选取的插值函数应该至少是二次的; 并且, 在拟合地形线时最适合的方法也是二次曲线, 而由二次曲线拟合出地面线再计算出横断面填挖面积函数, 其可导性也不应超过一阶, 否则光滑性太高, 容易在某些地形起伏大的地方形成拐点, 与实际情况不符。现采用二次B-样条函数拟合断面面积函数, 再运用样条函数求积公式计算土方量。

2.1 二次B-样条函数拟合断面面积函数

2.1.1 m 次B-样条曲线方程 首先, 引入对于分划 Δ 的 m 次样条函数 $S(x)$ 和 $\mathcal{Q}_m(x; t)$:

$S(x) \in C^{m-1}[a, b]$, 且其在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ 是 m 次代数多项式;

$$\mathcal{Q}_m(x; t) = (t - x)_+^m,$$

令 $t = x_{-m}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_N,$

$$x_{N+1}, \dots, x_{N+m}, \quad (4)$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad i = -2, -1, \dots, N+1$$

$$B_{i,1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_{i,0}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{i+1,0}(x), \quad i = -2, -1, \dots, N$$

$$B_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i} B_{i,1}(x) + \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+1}} B_{i+1,1}(x), \quad i = -2, -1, \dots, N-1$$

令渠道横断面填挖面积函数

$$A(x) \approx S(x) = \sum_{i=-2}^{N-1} \alpha B_{i,2}(x),$$

在桩号处, 有

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

然后将式(2)中 $\mathcal{Q}_m(x; t)$ 的 $N + 2m + 1$ 个 m 次样条函数作适当线性组合, 即可构造具有局部严格正交性的 $S(m, \Delta)$ 的基底, 即

$$\begin{aligned} B_{i,m}(x) &= (x_{i+m+1} - x_i) \mathcal{Q}_m(x_i, \\ &\quad x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}), \\ &\quad i = -m, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)称为第 i 个 m 次B-样条函数, 简称B-样条^[5]。又由于式(5)定义的 $m + N$ 个样条函数是线性无关的^[6], 所以组成 $S(m, \Delta)$ 的一组基底。这样, 定义于区间 $[a, b]$ 关于分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ 的任何 m 次样条函数 $S(x) \in S(m, \Delta)$ 都可以用 $B_{i,m}(x)$ 的线性组合来表示^[7], 即

$$S(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} \alpha B_{i,m}(x), \quad (6)$$

此即 m 次B-样条曲线方程。

2.1.2 二次B-样条函数基底 已知各实测桩号对应横坐标值 $a = l_0 < l_1 < \dots < l_m = b$, 每一位置都对应一组渠道填方或挖方断面面积 $A_0, A_1, \dots, A_m$ 。令 $N = m - 1$, 选取节点为

$$x_0 = l_0 = a,$$

$$x_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$x_N = l_m = b$$

然后加入新节点将其扩展为

$$\begin{aligned} x_{-2} < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \dots < x_N \\ &= b < x_{N+1} < x_{N+2}, \end{aligned}$$

取

$$x_{-2} = x_0 - 2(x_1 - x_0),$$

$$x_{-1} = x_0 - (x_1 - x_0),$$

$$x_{N+1} = x_N + (x_N - x_{N-1}),$$

$$x_{N+2} = x_N + 2(x_N - x_{N-1}).$$

由递推关系得

$$S(l_0) = \sum_{i=-2}^{N-1} \alpha B_{i,2}(l_0) = A_0,$$

$$S(l_1) = \sum_{i=2}^{N-1} \alpha B_{i,2}(l_1) = A_1,$$

⋮

$$\text{即} \begin{bmatrix} B_{-2,2}(l_0) & B_{-1,2}(l_0) & \dots & B_{N-1,2}(l_0) \\ B_{-2,2}(l_1) & B_{-1,2}(l_1) & \dots & B_{N-1,2}(l_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-2,2}(l_m) & B_{-1,2}(l_m) & \dots & B_{N-1,2}(l_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

系数矩阵B 是三对角正定矩阵, 可用追赶法求解该线性方程组^[8]。

2.2 用样条积分公式计算土方量

根据二次B-样条函数

$$A(x) \approx S(x) = \sum_{i=2}^{N-1} \alpha B_{i,2}(x),$$

$$B'_{i,3}(x) = 3 \left[\frac{B_{i,2}(x)}{x_{i+3} - x_i} - \frac{B_{i+1,2}(x)}{x_{i+4} - x_{i+1}} \right],$$

故

$$B_{-2,3}(x) = 3 \left[\frac{\int_{x_1-x}^{x_2-x} B_{-2,2}(x) dx}{x_1 - x_2} - \frac{\int_{x_2-x}^{x_1-x} B_{-1,2}(x) dx}{x_2 - x_1} \right],$$

⋮

$$B_{i,3}(x) = 3 \left[\frac{\int_{x_{i+3}-x}^{x_i-x} B_{i,2}(x) dx}{x_{i+3} - x_i} - \frac{\int_{x_{i+4}-x}^{x_{i+1}-x} B_{i+1,2}(x) dx}{x_{i+4} - x_{i+1}} \right],$$

⋮

$$B_{N-2,3}(x) = 3 \left[\frac{\int_{x_{N+1}-x}^{x_{N-2}-x} B_{N-2,2}(x) dx}{x_{N+1} - x_{N-2}} - \frac{\int_{x_{N+2}-x}^{x_{N-1}-x} B_{N-1,2}(x) dx}{x_{N+2} - x_{N-1}} \right],$$

$$B_{N-1,3}(x) = 3 \left[\frac{\int_{x_{N+2}-x}^{x_{N-1}-x} B_{N-1,2}(x) dx}{x_{N+2} - x_{N-1}} \right].$$

得出

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} B_{i,2}(x) dx = \frac{x_{i+3} - x_i}{3} \sum_{j=2}^{N-1} B_{j,3}(x), i = -2, -1, \dots, N-1 \quad (7)$$

所以

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-2}^x S(x) dx \\ &= \sum_{i=2}^{N-1} \alpha \int_{-2}^x B_{i,2}(x) dx \\ &= \sum_{i=2}^{N-1} \alpha \frac{x_{i+3} - x_i}{3} \sum_{j=2}^{N-1} B_{j,3}(x) \\ &= \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^i \alpha \frac{x_{i+3} - x_i}{3} B_{i,3}(x). \end{aligned} \quad (8)$$

故任意两桩号间的土方量

$$V = I(l_2) - I(l_1). \quad (9)$$

$$S(l_m) = \sum_{i=2}^{N-1} \alpha B_{i,2}(l_m) = A_m.$$

写成矩阵形式为 $B \hat{\alpha} = \beta$

可以直接对其进行积分计算土方量。其积分公式推导如下。

由B-样条函数的可微性, 有

3 算法验证

为了说明新算法(二次B-样条函数拟合法)计算渠道土方精度高的特点, 构造了一长度为400 m, 渠深为3 m, 渠道比降*i* = 0, 中线地面线由抛物线 $h = 3(L - 200)^2 / 40\,000$ 所确定的渠道(图2)计算土方量。分别运用本算法(二次B-样条函数拟合法)和平均断面法对其进行计算, 计算结果如表1所示, 其中的实际土方均采用直接积分方法算出^[9]。

由表1可见, 无论是局部相对误差还是总相对误差, 用改进的二次B-样条函数拟合法计算出的结果均比平均断面法计算结果小得多。

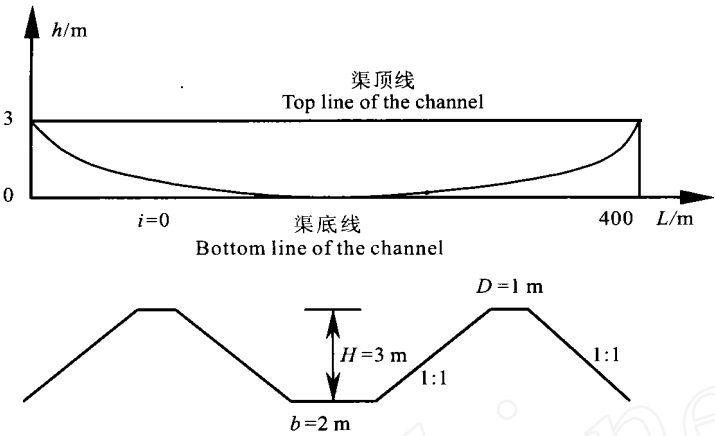


图 2 算例渠道纵横断面
Fig 2 Vertical and cross sections of example channel

表 1 土方计算结果(桩距 50 m)

Table 1 Earthwork calculation result (pile spacing: 50 meters)

桩号/m Stake num ber	地面 高程/m Ground elevation	渠底设计 高程/m Design elevation of channel bottom	断面面积/m ² Cross section area		土方量/m ³					
			填方面积 Fill area	挖方面积 Excavation area	实际土方量 Practical earth volum e		平均断面法 A verage cross- section method		二次B-样条 函数拟合法 Dual basic spline function	
					填方量 Fill volum e	挖方量 Excavation volum e	填方量 Fill volum e	挖方量 Excavation volum e	填方量 Fill volum e	挖方量 Excavation volum e
0+ 000	3.00	0.00	0.00	15.00						
0+ 050	1.69	0.00	6.07	6.22	130.40	505.80	151.75	530.50	138.70	510.00
0+ 100	0.75	0.00	14.63	2.06	517.10	192.90	517.40	207.00	515.20	192.00
0+ 150	0.19	0.00	21.45	0.41	915.50	54.65	901.90	61.75	915.40	54.60
0+ 200	0.00	0.00	24.00	0.00	1 156.95	6.60	1 136.25	10.25	1 156.50	6.38
0+ 250	0.19	0.00	21.45	0.41	1 156.95	6.60	1 136.25	10.25	1 156.50	6.38
0+ 300	0.75	0.00	14.63	2.06	915.50	54.65	901.90	61.75	915.40	54.60
0+ 350	1.69	0.00	6.07	6.25	517.10	192.90	517.40	207.00	515.20	192.00
0+ 400	3.00	0.00	0.00	15.00	130.40	505.80	151.75	530.50	138.70	510.00
汇总 Total Σ					5 440	1 520.00	5 414.60	1 619.00	5 451.60	1 526.00
单元渠段最大相对误差/% M aximum relative error in unit channel							16.40	55.00	6.00	3.00
总相对误差/% Total relative error							0.50	6.50	0.20	0.40

4 结 论

1) 平均断面法的误差问题不容忽视, 渠道断面面积(无论挖方或填方)是渠长的非线性函数, 而以分段线性函数表达式表达非线性的断面填挖面积是平均断面法计算渠道土方产生误差较大的根本原因。

2) 本研究提出了计算渠道土方的新方法——二次B-样条函数拟合法, 是用二次B-样条函数对渠断面填挖面积进行插值, 然后用积分法求出各单元渠段的填挖土方。算例结果表明, 该方法具有精度高, 构造方法简便, 便于程序化, 对复杂地形适应性强的特点, 优于现有的各种算法。

[参考文献]

[1] 唐平英 断面法土方量计算公式的精度[J] 港工技术, 1998, (1): 32- 33
[2] 薛红娟 浅谈大面积土方工程量的计算[J] 海南矿冶, 1996, (2): 30- 31
[3] 李云飞 面积形心法计算土石方量[J] 云南交通科技, 1999, 15(5): 28- 30
[4] 杨晓东 数解法在江堤土方量计算中的应用[J] 水利天地, 2002, (8): 42
[5] Schumaker L. L. Spline Functions: Basic Theory[M] New York: John Wiley & Sons, 1981.

- [6] 李庆扬 数值计算原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000
- [7] Bojanov B D, Hakopian H A, Sahakian A A. Spline Functions and Multivariate Interpolations[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1993
- [8] 邓建中 计算方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1985
- [9] 刘炳文, 许曼舒. Visual Basic 程序设计教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000

Essential deficiency and improvement of the average cross-section method calculating the channel earthwork volume

WANG Ming¹, SONG Tian-feng¹, LUO Yang-jun²

(1 North West Institute of Exploration, Design and Research, Xi'an, Shaanxi 710065, China;

2 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: Traditional average cross-section method for channel earthwork calculation was analyzed in detail. In light of its essential deficiency, a new method, which applies dual basic spline function to fit the sectional area function of fill & excavation in channel, and then combining with the spline integration formula to calculate earthwork volume of the channel, was brought about. The practicality and superiority of the method was also proved through an example in the paper.

Key words: calculation of earthwork in channel; average cross-section method; dual basic-spline function

《植物遗传资源学报》征订启事

《植物遗传资源学报》是中国农业科学院和中国农学会联合主办的专业性学术期刊, 由中国工程院院士董玉琛研究员担任主编。2000 年创刊, 2003 年国内外公开发行。国内刊号 CN 11-4996/S, 国际统一刊号 ISSN 1672-1810。

报道内容: 大田、园艺作物, 观赏、药用植物, 林用植物, 草类植物及其一切经济植物的有关植物遗传资源基础理论研究、应用研究方面的研究成果、创新性学术论文和高水平综述或评论。诸如, 种质资源的考察、收集、保存、评价、利用、创新、信息学、管理学等; 以及起源、演化、分类等系统学; 基因发掘、鉴定、克隆、基因文库建立、遗传多样性研究。

读者对象: 从事植物遗传资源科学研究工作的人员, 各有关大专院校的师生, 农业行政和推广人员。

季刊, 大16 开本, 2005 年由96 页扩版至108 页。定价10 元, 全年40 元。各地邮局发行, 邮发代号: 82-643。本刊编辑部常年办理订阅手续, 如需邮挂每期另加3 元。

地址: 北京市中关村南大街12 号 中国农业科学院《植物遗传资源学报》编辑部

邮编: 100081

联系电话: 010-62186657 62180257 62180279(兼传真)

电子信箱: zwyczyxb2003@sina.com zwyczyxb2003@163.com