

两圆锥相贯的形数分析*

李茶青¹, 魏恩甲², 何自立², 樊强²

(1 浙江省水利水电高等专科学校, 浙江 杭州 310016;

2 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

[摘 要] 运用平面解析几何及工程图学理论对两圆锥相贯进行了形数分析, 给出了相贯线上特殊点(最右点或最左点)的作图方法。

[关键词] 圆锥; 相贯线; 渐近线; 形数分析

[中图分类号] O185.2

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2004)06-0112-03

工程实际中, 物体的相贯是相当普遍的, 如何准确地确定出相贯线的形状, 是一个很重要的问题。在确定相贯线形状方面, 特殊点具有举足轻重的作用, 特殊点决定着相贯线的范围、可见性以及相贯线本身的特征等。有关圆锥与球的相贯线^[1]、球与椭圆锥的相贯线^[2]、正交圆柱与圆锥的相贯线极右点^[3]、圆柱与圆锥偏斜交的相贯线^[4]、圆柱与圆锥相贯线上的特殊点^[5]等问题已有论述。作者在此运用平面解析几何及工程图学理论, 对两圆锥相贯线进行形数分析, 并总结出了确定两圆锥相贯线上特殊点(最右点或最左点)的作图方法。

1 投影性质讨论

1.1 数学模型的建立

由图1可知, S, S_1 两圆锥轴线相交于 $O(O_1)$, 以 $O(O_1)$ 分别建立两坐标系 $O-XYZ$ 及 $O_1-X_1Y_1Z_1$ 。

两圆锥的数学方程^[6]可表示为:

$$x^2 + y^2 = \tan^2 \alpha (H - z)^2 \quad (S)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \tan^2 \alpha_1 (H_1 - z_1)^2 \quad (S_1)$$

采用坐标旋转变换^[7]:

$$x_1 = x \cos \theta - z \sin \theta$$

$$y_1 = y$$

$$z_1 = z \cos \theta + x \sin \theta$$

化简整理, 得正面投影交线方程为:

$$x^2 - (x \cos \theta - z \sin \theta)^2 =$$

$$\tan^2 \alpha (H - z)^2 - \tan^2 \alpha_1 [H_1 - (z \cos \theta + x \sin \theta)]^2$$

展开, 进一步化简得:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xz + a_{22}z^2 +$$

$$2a_{13}x + 2a_{23}z + a_{33} = 0$$

式中, $a_{11} = \sin^2 \theta \sec^2 \alpha$, $a_{12} = \sin \theta \cos \theta \sec^2 \alpha$, $a_{22} = \cos^2 \theta \sec^2 \alpha - \sec^2 \alpha$, $a_{13} = -H_1 \tan^2 \alpha \sin \theta$, $a_{23} = H \tan^2 \alpha \cos \theta$, $a_{33} = -(H^2 \tan^2 \alpha - H_1^2 \tan^2 \alpha)$ 。

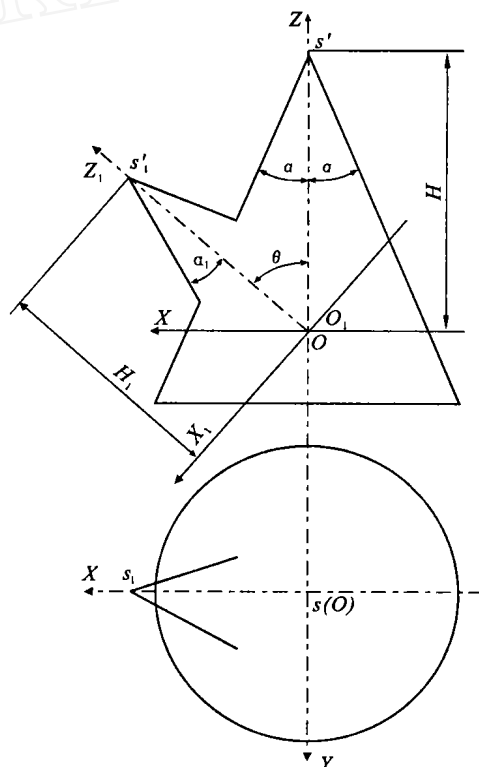


图1 两圆锥的相贯线分析

Fig 1 Analysis about the line of intersection of two circular cone

* [收稿日期] 2003-05-21

[基金项目] 浙江水利水电专科学校科研基金(213103)

[作者简介] 李茶青(1962-), 女, 陕西永寿人, 副教授, 主要从事工程制图研究。

1.2 相贯线正面投影性质分析

由上式可知, 两圆锥相贯线正面投影方程为二次曲线。若令 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, 由二次曲线的有关性质可知: $D > 0$ 时曲线为椭圆, $D = 0$ 时曲线为抛物线, $D < 0$ 时曲线为双曲线。对两圆锥相贯线来说, 由相贯线方程的系数可求得:

$$D = -\sin^2\theta \sec^2\alpha \sec^2\alpha$$

显然, $D < 0$ 。由此可断定两圆锥相贯线为双曲线。

2 双曲线中心及渐近线位置的确定^[8]

2.1 双曲线中心

双曲线是有中心的二次曲线。由平面解析几何原理^[7]可知, 在 Oxz 坐标系中, 双曲线中心坐标 (x_0, z_0) 为:

$$x_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \times (H \sin^2\alpha \cos\theta - H_1 \sin^2\alpha)$$

$$z_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -H \sin^2\alpha$$

从中心坐标 (x_0, z_0) 可以看出, S 和 S_1 的任意 1 个尺寸稍有变化, 中心坐标就有变化。对于具体的两圆锥 S 与 S_1 , 二者交线的中心为内切球与圆锥切线圆投影的交点, 即图 2 中线 12 和线 34 的交点 o' 。

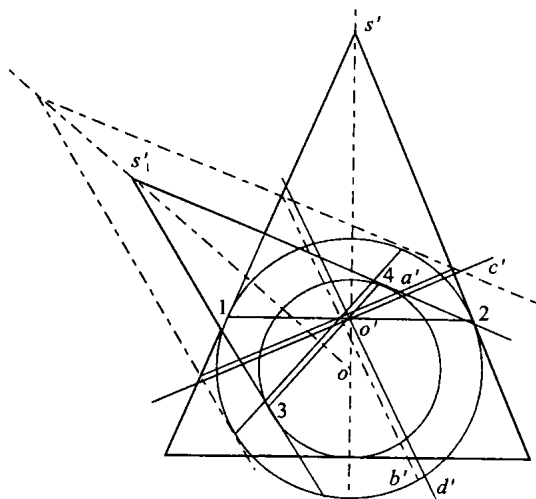


图2 双曲线中心及渐近线的确定

Fig 2 Definition of the center of hyperbola and asymptote

2.2 双曲线渐近线方向

平移双曲线方程, 使坐标原点移至双曲线中心, 则产生一个新坐标系 $O'x'z'$ 。平移后:

$$x = x' + x_0; z = z' + z_0$$

在新 $O'x'z'$ 坐标系中, 相贯线方程为:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'z' + a_{22}z'^2 + \frac{A}{D} = 0$$

$$\text{式中, } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\sin^2\theta \sec^2\alpha \sec^2\alpha \times$$

$$(H^2 \tan^2\alpha \cos^2\theta - H^2 \tan^2\alpha \cos^2\alpha), \frac{D}{A} = H^2 \tan^2\alpha \cos^2\theta - H^2 \tan^2\alpha \cos^2\alpha, R = H \tan\alpha, R_1 = H_1 \tan\alpha.$$

当 $\frac{D}{A} = 0$ 时, 双曲线退化为直线, 方程就变为渐近线方程, 即:

$$H_1 \tan\alpha \cos\theta - H \tan\alpha \cos\alpha = 0$$

$$R_1 \cos\theta - R \cos\alpha = 0$$

这属于两圆锥共有内切球面的情况。故可放大 S_1 或缩小 S , 找到它们共有的内切球面, 从而定出渐近线的方向, 如图 2 中 a', b' 所示。 S_1, S 两圆锥相贯线的渐近线是过 S_1, S 的中心点 o' 作 a', b' 两渐近线的平行线 c', d' ; 即为该交线的渐近线(图 2)。

3 两圆锥相贯线最右(最左)点的确定

作出了两圆锥相贯线的渐近线, 再根据相贯线的投影性质和特点以及作切线的方法, 可确定出双曲线的最右(左)点^[9]。双曲线任意弦被两渐近线所截, 截线段被弦的共轭直径平分, 双曲线与渐近线之间的两线段也相等。根据双曲线的上述性质和特点, 确定的作图方法如下(图 3):

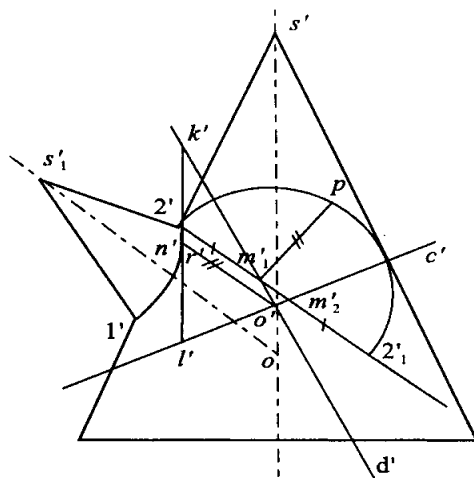


图3 相贯线最右点

Fig 3 The most right point of the line of intersection of two circular cone

过 2 点作一直线平行于投影方向, 交两渐近线于 k', l' 。取 k', l' 中点 n' , $o'h$ 直线即为与铅垂直径成共轭直径方向, 最右点一定在该直线上。

过 2 点作平行于 $o'h$ 的直线, 交渐近线于

m_1', m_2' , 取 $m_2'2_1' = 2'm_1'$, 以 $2_1'2_1'$ 为直径作半圆, 从 m_1' 作 $m_1'p \perp 2_1'2_1'$, 交半圆于 p 。

在 oh' 上取 $or' \perp m_1'p$, 得 r' 点为最右点。

4 结束语

通过对轴线相交的两圆锥相贯线的形数分析,

总结出了特殊位置点(最右点或最左点)的求解作图方法。根据同样的原理, 也可作出最上点或最下点。该法不但对于用定球心球面法求相贯线的特殊点是一个补充, 而且在教学及工程实际中也有一定的参考价值。

[参考文献]

- [1] 李 勇 圆锥与球相贯线形数分析[J]. 陕西工学院学报, 1998, 14(2): 80- 82
- [2] 邓东芳 球与椭圆锥相贯线形数分析及扩展[J]. 武汉科技大学学报(自然科学版), 2000, 23(1): 57- 60
- [3] 邓东芳 正交圆柱圆锥相贯线极右点的形数分析[J]. 鞍山钢铁学院学报, 2000, 23(1): 49- 51
- [4] 汪正俊, 李毅华, 秦 朗 圆柱与圆锥偏斜交相贯线求法的研究[J]. 淮南工业学院学报, 2001, 21(3): 62- 64
- [5] 李 冰, 薛颂菊 圆柱与圆锥相贯时相贯线上特殊点的讨论——正交的圆柱与圆锥相贯上极限位置点的准确作图方法[J]. 北京建筑工程学院学报, 2001, (4): 25- 28
- [6] 孟宪铎 解析画法几何学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1984 347- 348
- [7] 科恩 G A, 科恩 T M (美国). 数学手册[M]. 周民强, 孙山泽, 王跃东, 等译 北京: 工人出版社, 1987 31- 33
- [8] 徐宏文, 赵兰芬, 官嘉成 高等画法几何学[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1987.
- [9] 朱 辉, 曹 桃, 张士良, 等 高等画法几何[M]. 上海: 科学技术出版社, 1985

Graphics and mathematical analysis on intersection line of two cone

L I Cha-qing¹, W E I En-jia², H E Zi-li², F A N Qiang²

(1 Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou, Zhejiang 310015, China;

2 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest Sci-Tech University of

Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: This paper analysed the intersection line of two cones base on analytical geometry and engineering graphics theoretics, put forward a method of drawing the special point on the intersection line

Key words: cone; intersection line; asymptote; graphics and mathematics analysis