

随机过程的微观经济含义^{*}

杨智元¹, 何荣天¹, 丁 楷²

(1 广发证券博士后工作站, 广东 广州 510075; 2 长盛基金管理公司, 北京 100056)

[摘 要] 从经济学角度对随机过程的含义进行了解释, 从投资者的期望收益率独立于证券价格这一现象对证券价格按连续时间连续样本轨道的随机过程变动进行解释; 若假设影响证券价格变动的信息按泊松过程到达, 则可以对证券价格遵循连续时间不连续样本轨道的随机过程变化作出解释。可以用类似于连续时间随机过程的经济解释分析离散时间随机过程的经济含义。

[关键词] 证券价格; 连续时间随机过程; 离散时间随机过程; 经济含义

[中图分类号] F830.91

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2003)06-0184-03

金融经济学的中心研究问题是证券价格的变动方式。自库特(Cootner)等^[1]的研究之后, 这一方面一直是长盛不衰的研究热点。一般地, 证券价格变动采用随机过程进行描述。按时间参数分类, 可把随机过程分为连续时间的随机过程和离散时间的随机过程。本文试图结合数学理论从经济学角度对几个在证券市场研究中经常采用的随机过程进行解释, 以便在描述证券价格变动随机性质的同时, 能够更好地把握其微观经济基础。

1 连续时间随机过程的经济含义

从金融经济学的角度来看, 连续时间的分析只是对现实世界的一种抽象, 或者说, 是在交易的间隔时间极度短暂的情形下(相比于所分析的时间跨度)的一种简化。

默顿(Merton)^[2]曾经从数学角度对连续时间随机过程的经济假设进行了分析。首先, 分析交易时间区间 $[t, T]$, 设定最小交易间隔时间长度为 h , 总交易次数为 n , 则有 $nh = T - t$, 定义

$$\epsilon(k) = X(k) - X(k-1) - E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\} \quad (1)$$

式中, $X(k)$ 是证券在时刻 kh 的价格, $E_{k-1}\{\cdot\}$ 是已知时刻 $(k-1)h$ 以及此前的所有相关信息的条件期望算子。就是说, $\epsilon(k)$ 是未预期到的证券价格变化。

假设①证券价格非预期变动的不确定性在连续交易时也不可能被消除; ②证券价格非预期变动的不确定性在一个有限的时间段内不会达到无穷大;

③证券价格非预期变动的不确定性不会只集中在许多交易区间的一小部分区间里, 在几乎所有的交易区间里都会存在显著的不确定性; ④ $\epsilon(k)$ 是1个只取 m 个值 $\epsilon_j(k)$, ($j = 1, \dots, m$)的离散型随机变量, $p_j(k) = \text{Prob}\{\epsilon(k) = \epsilon_j(k)\}$; ⑤ p_j 和 ϵ_j 的变化是规则的(well behavior), 也就是说, 存在 q_j 和 r_j , 使得

$$p_j = O(h^{q_j}), \epsilon_j = O(h^{r_j}) \quad (2)$$

式中, ϵ_j 代表 $\epsilon_j(k)$; p_j 代表 $p_j(k)$; $O(\cdot)$ 代表同阶无穷小量。

在这些假设下, 默顿把随机过程分为3类: 不发生罕见事件(no rare events)的连续样本轨道过程、发生罕见事件(rare events)的连续样本轨道过程和发生罕见事件(rare events)的不连续样本轨道过程。然后他利用严格的数学理论证明第2类过程可以归结到第一类过程中。

换句话说, 按默顿的结论, 在连续时间金融研究模型中, 所用到的随机过程限于2类, 即连续样本轨道的扩散过程以及连续时间不连续样本轨道的随机过程。

1.1 连续时间连续样本轨道过程的经济含义

对于连续时间连续样本轨道扩散过程, 一般设定证券价格变量 S 的运动过程如下:

$$dS = \mu S + \sigma S dW \quad (3)$$

其中, μ 和 σ 为变量 S 的期望漂移率和波动率, 在这里均为常数; W 是标准维纳(Wiener)过程, 即假设证券价格按几何布朗运动变化。

^{*} [收稿日期] 2002-11-19

[基金项目] 国家教委“十五”攻关项目(01JB790026)

[作者简介] 杨智元(1968-), 男, 福建龙海人, 博士, 主要从事资产定价研究。

一些研究者^[3]认为: 对于上述模型的设定只是一种直观判断, 没有更多的道理来表明为什么要这样选择, 只是这个模型较好地描述了一些资产的价格变化而已。

不过, 注意到证券价格按几何布朗运动变化的设定与下述设定的等价性, 就可以对其进行合理解释。

假设证券价格 S 在任一时间段 $[t, T]$ 末服从如下分布:

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right] \quad (4)$$

这里, $N[m, s]$ 是均值为 m 、标准差为 s 的正态分布随机变量。

首先, 注意到可交易证券价格的一个特性, 即投资者要求来自证券的期望收益率与证券价格无关。

考察证券价格在时间 $[0, T]$ 内的变化。假设 S_i 是证券在时刻 i 的价格, 定义 $r_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$, 如果在各个时刻预期收益完全相同, 则可以合理假设收益率 r_i 是独立同分布的随机变量。

由于 $(S_i/S_{i-1}) = 1 + r_i$, 故 (S_i/S_{i-1}) 也是独立同分布的随机变量。令 $X_i = (S_i/S_{i-1})$, 取 $S_0 = 1$, 则在时刻 t

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_t =$$

$$(S_1/S_0) \cdot (S_2/S_1) \cdot \cdots \cdot (S_t/S_{t-1}) = S_t$$

所以

$$\ln S_t = \sum \ln X_i \quad (5)$$

由于 X_i 是独立同分布的, 当交易趋于连续时 (即所考察的时间段无限细分), 按照中心极限定理, $\ln S_t$ 趋近于一个正态分布的随机变量。

相应的, 对应于 $t=0$ 和 $S_0=1$, (4) 式变为

$$\ln S_T \sim N \left[(\mu - \sigma^2/2)T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad (6)$$

这是一个正态分布的随机变量。这样一来, 把式(3)经过适当的正则化后, 可以变为(4)式。即说明(3)式的设定是合理的。

尽管可以从上述角度对证券价格运动遵循几何布朗运动过程的经济意义作出解释, 不过, σ 为常数是一个很强的假设, 在实证分析中很少会得到证实。

对股票而言, 经常观测到的是^[4]: 当 S 下跌时, σ 趋于增大。反之, 当 S 上升时, σ 趋于减小。

这导致了对(3)式的一种修正, 把 σ 修改为 $\sigma S^{-\alpha}$, 这里 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。这样修改的结果是: 当 S 下跌时, $\sigma S^{-\alpha}$ 增加, 而当 S 上升时, $\sigma S^{-\alpha}$ 下降, 波动率随 S

的变化而改变。这就是所谓的常数方差弹性 (Constant Elasticity of Variance) 模式^[5]:

$$dS = \mu S + \sigma S^{1-\alpha} dW \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (7)$$

在现实生活中, 一般地, 当股票价格下跌时, 该公司权益资本的价值将下降 (如果企业资不抵债, 则债务的市场价值也会下降, 但权益资本的价值下降得更多), 从而引起债务与所有者权益比率增大, 财务杠杆的增大将增加公司的风险, 即增加了权益资本的风险, 这引起股票波动率的增大。另一方面, 当股票价格上涨时, 该公司权益资本的价值上升, 进而引起债务与所有者权益比率减小, 这种财务杠杆的变化将降低公司的风险, 即权益资本的风险变小, 这将引起股票波动率的减少。这在一定程度上解释了这一模式的经济含义。

1.2 连续时间不连续样本轨道过程的经济含义

默顿的前 4 条假设是相当一般的, 对于绝大多数证券而言, 满足前 4 条假设是很正常的。然而, 其第 5 条假设是相当严格的, 这是一条很不自然的假设^[6]。这也是导致研究者采用其他随机过程如连续时间不连续样本轨道的随机过程的原因。

常用于描述证券价格变化的不连续样本轨道随机过程是跳跃过程。设定证券价格运动过程如下:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(S_t, t) dq_t \quad (8)$$

式中, $\sigma(S_t, t)$ 表示证券价格的波动幅度, 一般地, 它是一个随机变量, 即变化的幅度是随机的; q_t 是一个泊松 (Poisson) 过程, 其强度为 $\lambda(x)$ 。

或者, 等价地

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(S_t, t) dq_t =$$

$$\mu S_t dt + \begin{cases} \lambda(x) dt & \sigma(S_t, t) \\ 1 - \lambda(x) dt & 0 \end{cases} \quad (9)$$

这一模式的经济含义可以从信息与证券市场的关系进行解释。如果从信息对证券市场影响的角度进行分析, 假设信息随机到达, 且认为信息对证券价格的影响也是随机的, 并假设证券由 s 个个体组成, 每一个个体的价格为 1, 则证券价格为 S ; 而 $\sigma(S_t, t)$ 表示信息对证券价格的影响, 它可以设定为一个随机变量, 以描述变化幅度的随机性; 对于随机到达的信息, 一般假设其由泊松过程产生, 在一小段时间 Δt 内, 信息到达的随机性表现为 Δq_t , Δq_t 是一个强度为 $\lambda(x)$ 的泊松分布。

此外, 对 $\lambda(x)$ 的不同设定可以有不同的经济解释: 如果组成 S 的个体变化完全相关, 则可以设定 $\lambda(x) \equiv$ 常数 λ , 一个个体发生跳跃时, 每一个个体都

发生跳跃;另一方面,如果组成 S 的个体变化是完全独立的,则可以设定 $\lambda(x) = \lambda S$,此时,一个个体发生跳跃时,其他个体可能发生变化,也可能不发生变化。这一模式的一个优点就在于允许个体独立变化,这是扩散过程所无法描述的。在某种程度上,这可以用来描述股票价格指数的变化。

连续时间不连续样本轨道随机过程的另一类典型代表是所谓的跳跃扩散过程,这类过程由伊藤(Ito)过程和泊松过程混合而成:

$$dS/S = (a - \lambda k)dt + \sigma dW + dq \quad (10)$$

式中, a 是股票的预期收益; σ 为没有发生跳跃时股票收益的波动率; W 是一个标准维纳过程; q 是一个泊松过程; λ 是泊松过程发生跳跃的强度,跳跃在泊松的随机时间发生,其把股票价格从 S 拉到 $S \cdot Y$,其中 Y 为对数正态分布的随机变量; k 为 $(Y-1)$ 的期望值。

跳跃扩散过程可以有如下的经济解释:一般地,对于大多数公司的股票价格而言,在绝大多数时间里,股价按伊藤过程连续而微小地变化;在某些特殊的时刻,一些有关该公司的特别消息,比如公司涉足投资业务的巨大损失、公司涉及重大诉讼的败诉、公司主营业务的前景由于某一政策而看好等消息,将引起该公司股价较大幅度的变化。在这些特殊时点,股价的变动将不只是微小的,而是跳跃性的,其变化将由泊松过程决定,这种情形下,可以合理地设定股票价格遵循跳跃扩散过程。

2 离散时间随机过程的经济含义

离散时间的随机过程是仅在固定时刻如 $t=1, 2, \dots$ 时发生改变的随机过程。这类特殊的离散时间随机过程是二叉树过程(二项过程)^[7]。

二叉树过程(二项过程)假设交易离散发生。对于任意给定的整数 I ,把时间段 (t, T) 分为 I 个等间

隔时间段 $(t, t+1), (t+1, t+2), \dots, (t+(I-1), T)$,这里 $t+k$ 代表时刻 $t+[k(T-t)]/I$ 。

交易只在各时间段末的时点上发生,证券的价格只在各时间段末的时点上发生变化。假设变化如下:

给定证券在时刻 $t+i$ 的价格 S_{t+i} ,则在时刻 $t+(i+1)$

$$S_{t(i+1)} = \begin{cases} S_{t+i}\mu & \text{概率为 } P \\ S_{t+i}d & \text{概率为 } 1-P \end{cases} \quad (11)$$

一般地,给定现在(时刻 t)的价格 S_t ,对于给定的正整数 I ,未来(时刻 T)的价格 S_T 为一个取 $I+1$ 个值的离散型随机变量:

$$\text{Prob}(S_T = S_t \mu^j d^{I-j}) = \begin{bmatrix} I \\ j \end{bmatrix} p^j (1-p)^{I-j}, j=0, \dots, I \quad (12)$$

$$\text{式中, } \begin{bmatrix} I \\ j \end{bmatrix} = \frac{I \cdot (I-1) \cdots 1}{(j \cdot (j-1) \cdots 1) ((I-j) \cdot (I-j-1) \cdots 1)} = \begin{bmatrix} I \\ I-j \end{bmatrix}.$$

换句话说, $S_T = S_t \mu^j d^{I-j}$, j 服从参数为 $\{I, p\}$ 的二项分布,即 $\text{Prob}(j=n) = \begin{bmatrix} I \\ n \end{bmatrix} p^n (1-p)^{I-n}, (n=0, \dots, I)$ 。

二叉树过程所描述的证券价格变化非常简单,到某一时点后,下一个时点的价格变化只可能有两种状态,且变化的幅度完全相同。但是如果参数选择适当,则二叉树过程可趋近于一些连续时间的随机过程^[8]。

在现实生活中,经常观察到的一个现象是:证券的价格不是上涨就是下跌。因此,对二叉树过程可以做这样的解释,即证券价格要么上涨,要么下跌,要么是几个涨跌的复合,使得证券的价格保持不变。

此外,由于二叉树过程能够收敛于连续时间的随机过程,因此,当交易时间极其短暂时,可以用连续时间随机过程的金融含义对其做出类似的解释。

【参考文献】

- [1] Cootner P H. The random character of stock market prices[M]. Cambridge: MIT Press, 1964
- [2] Merton R C. Continuous-time finance[M]. Cambridge: Basil Blackwell, 1992
- [3] 陈舜. 期权定价理论及其应用[M]. 北京: 中国金融出版社, 1998
- [4] Jarrow R A, Rudd A. Option pricing[M]. Illinois: Richard D Irwin, 1983
- [5] Hull J. Options, futures and other derivatives[M]. New York: Prentice-Hall, 1997
- [6] Hunt P J, Kennedy J E. Financial derivatives in theory & practice[M]. San Francisco: John Wiley & Sons, 2000
- [7] Kwok Y K. Mathematical models of financial derivatives[M]. New York: Springer-Verlag, 1998
- [8] Ross S M. Stochastic processes[M]. San Francisco: John Wiley & Sons, 1983

(下转第198页)

Progress of techniques for virus-free fruit trees

PENG Xiang-yong¹, MA Feng-wang¹, ZHANG Kai-chun²

(1 College of Horticulture, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China;

2 Beijing Pomology and Forestry Research Institute, Beijing 100093, China)

Abstract: According to the achievements in the field, this paper reviewed the current four methods of virus-free in fruit trees: physical therapy, chemotherapy, shoot-tip culture and transgenic technique, and introduced the manipulative process and their characteristics. In addition, it was figured out that antiviral drugs developing and techniques of transgene would be the main research fields of virus-free in the future.

Key words: fruit trees; virus; techniques of virus-free

(上接第 186 页)

The micro-economic connotation of stochastic processes

YANG Zhi-yuan¹, HE Rong-tian¹, DING Ying²

(1 Post Doctoral R & D Base, Guangfa Securities Co., LTD. Guangzhou, Guangdong 510075;

2 Changsheng Fund Management Co., LTD. Beijing 100056, China)

Abstract: This paper studies the economic connotation of stochastic processes used in financial research. If the investor's expected return is independent to securities, price is generated by Poisson process, then the securities' price is discontinuous. The explanation for continuous time case can be used to the discrete time case too.

Key words: the securities' price; continuous time stochastic process; discrete time stochastic process; economic connotation