

边梁效应的数值模拟^{*}

曲小钢¹, 张仨举¹, 冯芙叶²

(1 西安建筑科技大学 理学院, 陕西 西安 710055; 2 西安科技学院 基础课部, 陕西 西安 710054)

[摘 要] 应用数值方法模拟了边梁的效应, 给出了一个边梁的弯曲刚度与扭转刚度的配置公式, 从而消除了板的挠度、弯矩、剪力等随边梁刚度的增大而增大的不合理现象, 并对忽略边梁的抗扭能力所导致的误差进行了定量研究。

[关键词] 板; 弯曲问题; 边梁效应; 数值模拟

[中图分类号] TU 339

[文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2003)04-0191-03

具有边梁加固的板是建筑工程中的一种基本构件, 这种板的边缘与梁刚连, 可增加其承载能力。当板弯曲变形时, 边梁也随之弯曲和扭转, 于是, 可借助于梁的理论计算边梁的弯曲应变能和扭转应变能, 并将其添加到系统的总势能中, 从而建立问题的变分模型^[1~3], 亦可将边梁因变形而产生的内力添加到板的边界力平衡方程中, 从而获得边界条件^[4]。

在已有的模型和计算实例中^[1~7], 通常将边梁的抗弯、抗扭能力考虑为2个相互独立的因素, 或者忽略抗扭能力以简化计算。这种处理方式与实际结构可能不符, 因而难以呈现板与边梁相互作用的规律。

本文基于弹性理论给出了一个弯、扭刚度的配置公式, 从而消除了板的挠度、内力等随边梁扭转刚度的增大而增大的不合理现象。这种配置公式对于工程中常见的结构都是适用的。计算结果同时表明, 忽略边梁的抗扭能力将导致显著的误差。

1 计算模型

考虑图1所示矩形板, 板面承受均布荷载 q , 与 y 轴平行的两个板边取为简支边, 与 x 轴平行的两个板边取为自由边, 并有边梁加固。该问题的弯曲微分方程与边界条件为^[2~4]:

$$\begin{cases} D \Delta^2 w = q, 0 < x < a, -b/2 < y < b/2; \\ w|_{x=0,a} = w_{xx}|_{x=0,a} = 0; \\ [D(w_{yy} + \mu w_{xx}) + GJ w_{xxy}]|_{y=\pm b/2} = 0; \\ [D(w_{yyy} + (2-\mu)w_{xyy}) + EI w_{xxx}]|_{y=\pm b/2} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中, w 为板的挠度, D 为板的弯曲刚度, μ 为板的 Poisson 系数, EI 为边梁的弯曲刚度, GJ 为边梁的扭转刚度。

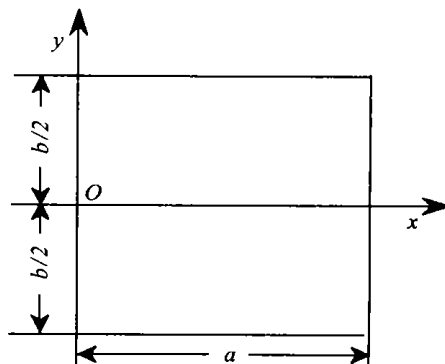


图1 具有边梁加固的矩形板

Fig. 1 Plate with boundary beams

采用 Fourier 分析方法可获得问题(1)的 Levy 型解答^[5]:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^5} \left[1 + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } A_m &= (A_m^{(1)} + A_m^{(2)} \beta_m + A_m^{(3)} \beta_m \gamma_m) / C_m; \\ B_m &= (B_m^{(1)} + B_m^{(2)} \beta_m + B_m^{(3)} \beta_m \gamma_m) / C_m; \\ C_m &= H_m^{(1)} + H_m^{(2)} \beta_m + H_m^{(3)} \gamma_m + H_m^{(4)} \beta_m \gamma_m; \\ \alpha_m &= m\pi b / 2a; \\ \beta_m &= m\pi EI / D a; \\ \gamma_m &= m\pi GJ / D a; \\ A_m^{(1)} &= \mu(1+\mu) \operatorname{sh} \alpha_m - \mu(1-\mu) \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m; \end{aligned}$$

^{*} [收稿日期] 2002-11-12

[基金项目] 陕西省教委专项研究基金资助项目(01JK201)

[作者简介] 曲小钢(1959-), 男, 山西定襄人, 副教授, 硕士, 主要从事应用数学与计算力学研究。

$$A_m^{(2)} = -2\text{ch}\alpha_n - \alpha_n \text{sh}\alpha_n;$$

$$A_m^{(3)} = -\text{sh}\alpha_n - \alpha_n \text{ch}\alpha_n;$$

$$B_m^{(1)} = \mu(1-\mu)\text{sh}\alpha_n;$$

$$B_m^{(2)} = \text{ch}\alpha_n;$$

$$B_m^{(3)} = \text{sh}\alpha_n;$$

$$H_m^{(1)} = (1-\mu)(3+\mu)\text{ch}\alpha_n \text{sh}\alpha_n - (1-\mu)^2\alpha_n;$$

$$H_m^{(2)} = 2\text{ch}^2\alpha_n;$$

$$H_m^{(3)} = 2\text{sh}^2\alpha_n;$$

$$H_m^{(4)} = \alpha_n + \text{ch}\alpha_n \text{sh}\alpha_n.$$

依据(2)式可得板面中点的挠度、弯矩及简支边中点的横向剪力的计算公式:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{4qa^4}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1+A_m}{m^5}, \\ M_x\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} \\ &\quad \frac{1+(1-\mu)A_m-2\mu B_m}{m^3}, \\ Q_x(0, 0) &= \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1-2B_m}{m^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

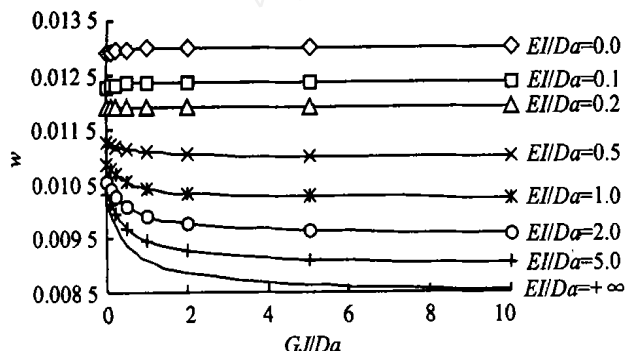


图2 挠度曲线($b/a=2$)

Fig. 1 Curves of the deflections

3 弯曲刚度与扭转刚度的配置公式及计算结果

上述计算中, 挠度和内力随边梁扭转刚度的增大而增大的不合理现象源于未考虑梁的弯曲刚度与扭转刚度之间的关系。

依据弹性理论^[1,4,7], 梁的拉压模量 E 与剪切模量 G 之间存在如下关系: $G = E/2(1+\nu)$, 式中, ν 为梁的 Poisson 系数。因此, 梁的弯曲刚度 EI 与扭转刚度 GJ 成正比。令

$$GJ = \lambda EI, \quad (5)$$

则比例常数

2 数值模拟与分析

取 $\mu = 0.3$; $b/a = 0.5, 1, 2$; $EI/Da = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, +\infty$; $GJ/Da = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, +\infty$ 计算了(3)式中各量的值, 计算结果见图2和图3, 其中的无量纲量 w, M, Q 的意义为

$$\begin{aligned} w &= \frac{Dw(a/2, 0)}{qa^4}, \\ M &= \frac{M_x(a/2, 0)}{qa^2}, \\ Q &= \frac{Q_x(0, 0)}{qa}. \end{aligned} \quad (4)$$

计算结果表明: (1) 当 $EI/Da > 0.5$ 时, w, M, Q 随边梁扭转刚度的增大而减小; 当 $EI/Da < 0.2$ 时, 这些值随边梁扭转刚度的增大而增大。(2) 挠度和内力受边梁扭转刚度的影响十分明显, 尤其是当 $EI/Da > 0.5$ 时, 若忽略边梁的抗扭性能将产生显著的误差。例如, 当 $\mu = 0.3$, $b/a = EI/Da = GJ/Da = 1$ 时, 挠度、弯矩及剪力的相对误差依次为 9.8%, 11% 及 8.8%。

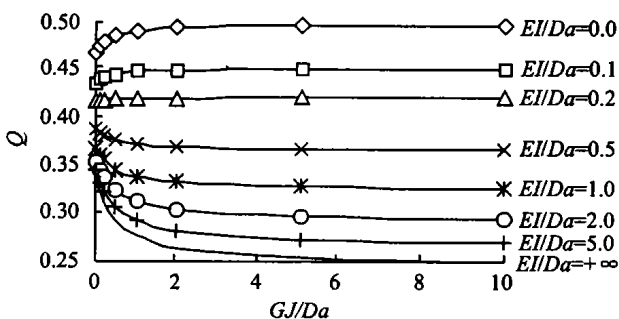


图3 剪力曲线($b/a=1$)

Fig. 3 Curves of shearing forces

$$\lambda = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{L}{I}. \quad (6)$$

据截面惯性矩 I 与极惯性矩 J 的计算公式: $I = \iint_A y^2 dA$ 及 $J = \iint_A r^2 dA$, 可见, 有 $J > I$, 于是, 若取 $\nu = 0.3$, 则有 $\lambda > 0.38$ 。对几种常见截面, 计算显示

$\lambda = 0.38 \sim 1.15$ 。例如, 对圆形和圆环形截面, $\lambda = 0.77$; 对矩形和空腔矩形截面 $\lambda = 0.48 \sim 1.15$ 。

取 $\mu = 0.3$; $b/a = 0.5, 1, 2$; $EI/Da = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, +\infty$; $\lambda = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$; GJ/Da 按(5)式取值, 计算(3)式中各量的值, 结果显示挠度和内力均随边梁刚度的增大而减小(图4), 配置公式(5)的使用收到了良好的效果。

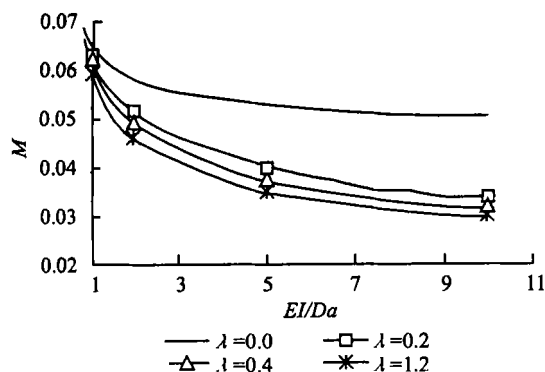
图4 弯矩曲线($b/a=1$)

Fig. 4 Curves of moments

4 结 语

边梁的抗弯、抗扭性能应综合考虑, 而不应作为相互独立的2个因素, 否则将会导致板的挠度、内力等随边梁刚度的增大而增大的不合理现象。按(5)式配置边梁的弯曲刚度和扭转刚度, 可使这一现象得以消除, 但该问题还有进一步研究的必要。边梁的弯曲刚度和扭转刚度按一定方式配置, 也可消除因忽略边梁的抗扭性能而产生的误差。

[参考文献]

- [1] 冯 康, 石钟慈 弹性结构的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [2] 曲小钢 具有边梁加固的板的弯曲[J]. 西北建筑工程学院学报, 1995, (1): 23- 31.
- [3] 萨马尔斯基 A A 安德列耶夫 B B 椭圆型方程的差分方法[M]. 武汉大学计算数学教研室, 译 北京: 科学出版社, 1984.
- [4] Timoshenko S P, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells[M]. 2nd ed New York: McGraw-Hill Book Company, 1959.
- [5] 曲小钢, 李小健 具有边梁加固的板弯曲问题的Levy解及其收敛性[J]. 西安建筑科技大学学报, 1998, 30(3): 298- 300.
- [6] 曲小钢 具有边梁加固的板的弯曲问题的差分方法[J]. 计算物理, 1997, 14(4): 558- 560.
- [7] 徐芝纶 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.

Numerical simulation of the responses of boundary beam s

QU Xiao-gang¹, ZHANG Quan-ju¹, FENG Fu-ye²

(1 School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an, Shaanxi 710055, China;

2 Department of Basic Course, Xi'an Institute of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi 710054, China)

Abstract: The responses of boundary beam s are simulated numerically and the relationship between the bending and torsional rigidity of the beam s is presented. With the relationship, the irrational phenomena that the displacements, moments and shearing forces of the plates increase as the rigidity of the beam increases are avoided. The errors due to disregarding the torsional rigidity of the beam s are analyzed as well.

Key words: plates; bending problem; responses of boundary beam s; numerical simulation