少数者博弈模型的最小二乘解法*

刘亚相, 孙洪罡, 王乃信

(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘　要]　研究了少数者博弈问题, 建立了少数博弈中决策人与其他决策人之间的收益博弈模型, 运用最小二乘法对其求解, 进而确定了每个决策人将要进行的决策方案, 再根据收益博弈模型, 讨论并给出了决策人的最优决策。

[关键词]　少数者博弈; 决策方案; 最小二乘法

[中图分类号]　O29　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1671-9387(2003)01-0151-04

生活在社会群体中的人们常常会遇到这样的问题, 也就是有许多决策人同时面临两种选择, 如果决策人的选择是较少人选择的, 就将获益; 否则肯定会失利。在不考虑道德因素的前提下, 决策人如何决策, 这就是少数者博弈问题[1], 这一命题是 1997 年由瑞士华人张翼成提出的, 现已有人用模仿效应对其进行了研究[2], 但迄今为止还没有运用最小二乘法[3]解决此类问题的报道。本研究给出了一种运用最小二乘法解决少数者博弈问题的新途径, 现报道如下。

1　模型的建立与求解

现假设有 A, B 两个备选方案, 其收益均为 S, n 个决策人自由选择 A 和 B 方案中的 1 个作为决策, 并与选择该种方案的决策人平均分得收益 S, 且已知 n 个决策人的 m 组历史决策数据 ($m \geq n$)。现在, n 个决策人当中的第 n 个决策人想根据历史数据确定自己的最佳决策方案, 以获得最大收益, 那么他应当如何决策。

1.1　收益博弈模型

首先建立第 n 个决策人与其他 $n-1$ 个决策人的决策间的收益博弈模型, 确立第 n 个决策人与其他决策人间的收益分布如表 1 所示。

表 1 中, 第 1 列表示第 n 个决策人的两套备选方案 A 和 B。第 1 行表示其余 $n-1$ 个决策人可能的决策情况, 即 (i, j) 表示其余 $n-1$ 个决策人中 i 个人选择了 A 方案, j 个人选择 B 方案, 且 $i+j=n-1$。表 1 还给出了 n 个决策人选择不同决策情况下第 n 个决策人的收益情况。其中, $\frac{S}{i+1}$ 表示在其他决策人选择 (i, j) 决策时, 第 n 个决策人选择 A 方案时所获收益; 同样, $\frac{S}{j+1}$ 表示在相同情况下, 第 n 个决策人选择 B 方案时所获收益。显然, 当 $i>j$ 时, $\frac{S}{i+1}<\frac{S}{j+1}$; 当 $i<j$ 时, $\frac{S}{i+1}>\frac{S}{j+1}$。

表 1　第 n 个决策人的收益分布

Table 1　The profit distribution of the nth policy maker

第 n 个人的决策方案 The schemes of the nth policy maker	其他决策人的方案 The schemes of the other policy makers				
	$(0, n-1)$	……	(i, j)	……	$(n-1, 0)$
A	S	……	$\frac{S}{i+1}$	……	$\frac{S}{n}$
B	$\frac{S}{n}$	……	$\frac{S}{j+1}$	……	S

从表 1 中可以看到, 第 n 个决策人只有 2 个备选方案, 而其他 $n-1$ 个决策者共有 n 种决策情况, 第 n 个决策人共有 $2n$ 种获益可能。而且从表 1 分析可知, 当第 n 个决策人选择少数决策人选择的方案时获益多, 故第 n 个决策人要想获得最大收益, 则必须知道其他决策人的决策情况, 当其他决策人不改变其决策规律时, 又如何预测其决策情况呢? 下面参照历史决策数据, 运用最小二乘法, 对其余决策人的决策方案进行预测。

2.2　最小二乘法求解

根据历史决策数据, 可以用最小二乘法得出每

* [收稿日期]　2002-11-08
[基金项目]　西北农林科技大学青年教师科研专项基金资助项目(0450A6)
[作者简介]　刘亚相(1962-), 男, 陕西扶风人, 副教授, 管理学博士, 主要从事经济管理的数学方法研究, 029-7092793。

个决策人上一次决策情况与下一次决策方案间的线性方程。由此方程,可以用最近的决策情况预测出其他决策人将要做出的决策。最后根据决策人的收益博弈模型,选出第 n 个决策人的最佳决策方案。

具体求解方法如下:

设第 i 个决策人的预期决策方程为:

$$a_{i1}x_{1,j-1} + a_{i2}x_{2,j-1} + \cdots + a_{in}x_{n,j-1} = y_{ij} \quad (1)$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$; $j=2,3,\cdots,m$。$x_{i,j-1}$ 代表第 i 个人第 $j-1$ 次决策值,若选择A 方案取值为1,选择B 方案取值为-1。a_{ik} 为第 k 个决策人对第 i 个决策人的决策影响系数, $k=1,2,\cdots,n$。若 $|a_{ik}|$ 较大,说明第 k 个决策人的决策对第 i 个决策人的决策影响较大。y_{ij} 为第 i 个决策人第 j 次将要进行的决策值,假定:若 $y_{ij}\geq 0$,则选择A 方案,否则选择B 方案。

根据历史决策数据可得如下方程组:

$$\begin{cases} a_{i1}x_{11} + a_{i2}x_{21} + \cdots + a_{in}x_{n1} = y_{i2} \\ a_{i1}x_{12} + a_{i2}x_{22} + \cdots + a_{in}x_{n2} = y_{i3} \\ a_{i1}x_{1,m-1} + a_{i2}x_{2,m-1} + \cdots + a_{in}x_{n,m-1} = y_{im} \end{cases} \quad (2)$$

设

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,m-1} & x_{2,m-1} & \cdots & x_{n,m-1} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \qquad Y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{in} \end{bmatrix}$$

则方程组(2)可改写为:

$$XA_i = Y_i \quad (3)$$

运用最小二乘法进行计算

$$X^TXA_i = X^TY_i \quad (4)$$

将数据代入方程(4)中,可得出 A_i 的最小二乘解,将该值代入方程(1),从而确定第 i 个人的预期决策方程(1)。再将最近一次的历史决策数据代入方程(1),就可得出第 i 个决策人将要进行的决策方案值,从而确定其决策方案。

按照以上方法,同样可以确定其他决策人将要进行的决策方案。最后,将其余 $n-1$ 个决策人将要进行的决策情况代入到收益博弈模型中,从而就可以确定第 n 个决策人的最佳决策方案。

当预测结果出现其他 $n-1$ 个决策人选择两种方案的人数相等的情况时,决策人将要进行决策的收益虽已确定,但可以考虑选择哪项方案会使下一次决策情况出现较大的不均衡,从而使决策人在下一次决策时,可以做出最优决策并获得更大收益,这也就是多算胜少算。

2 实例分析

若甲、乙、丙、丁、戊5个人分别对A 和B 2种产品进行投资。每人1次只能投资1种产品,且每种产品的总收益额固定,投资人平均获得该种产品的收益。5个人的8次投资数据如表2。现在丁想根据投资数据确定自己的最佳投资方案,以获得最大收益,那么第9次他将如何投资呢?

表2 甲、乙、丙、丁、戊5人的历史投资数据

Table 2 The history data of invest

投资人 Investor	次数 Times							
	1	2	3	4	5	6	7	8
甲 The first	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
乙 The second	-1	1	-1	1	1	1	1	1
丙 The third	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
丁 The fourth	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
戊 The fifth	-1	-1	1	1	1	-1	1	1

注:投资A 产品为1,投资B 产品为-1。

Note: Investment for product A is 1, for product B is -1.

根据表1首先建立丁与其余4人之间的收益博弈模型,假设每种产品的收益值为15。

从表3可以看出,只有其余4个人选取(2,2)方案时,丁无论选择哪种产品获利均相等。在其他情况下,丁投资不同的产品,就会获得不同的收益。如果预测出其余4人的投资情况,那么丁就可对获利益多的产品进行投资。

表 3　丁的收益分布分析

Table 3　The profit distribution of the fourth investor

丁的投资方案 The investment schemes of the fourth investor	甲、乙、丙、戊投资方案 The investment schemes of the other investors				
	(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)
A	3	3.75	5	7.5	15
B	15	7.5	5	3.75	3

下面对其余 4 人的投资方案进行预测。

先对甲的下一次投资方案进行预测。甲的投资方案向量值为:

$$Y_{甲} = [-1, 1, -1, -1, -1, -1, 1]^T$$

设甲与其余 4 人的投资影响系数为:

$$A_{甲} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$$

历史投资矩阵 X 为:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $Y_{甲}$, $A_{甲}$, X 代入公式(4)得

$$a_1 = 0.333;\ a_2 = 0;\ a_3 = -0.667;\ a_4 = 0;\ a_5 = 0$$

可得甲的预期投资方程为:

$$Y_{甲} = 0.333x_{甲} - 0.667x_{丙} \tag{5}$$

同理, 可以得出乙、丙、戊 3 人的预期投资方程:

$$y_{乙} = -0.333x_{甲} + 0.333x_{丙} - 0.333x_{丁} \tag{6}$$

$$y_{丙} = 0.333x_{甲} - x_{丙} - 0.333x_{丁} \tag{7}$$

$$y_{戊} = 0.333x_{甲} - x_{丙} - 0.333x_{丁} \tag{8}$$

将第 8 次投资情况的投资值(1, 1, 1, -1, 1)代入方程(5)、(6)、(7)、(8), 可以得到甲、乙、丙、戊 4 人的预测投资值, 当投资值大于等于 0 时, 选择 A 产品, 否则投资 B 产品。最终, 可以得到其余 4 人的预测投资情况(表 4)。

表 4　甲、乙、丙、戊投资预测情况

Table 4　Investment prediction for the first, second, third and fifth investors

投资人 Investor	投资方案 Scheme	投资人 Investor	投资方案 Scheme
甲 The first	B	丙 The third	B
乙 The second	A	戊 The fifth	B

由表 4 可知, 其余 4 人选择收益博弈模型中的(1, 3)方案, 则知丁投资 A 产品时获益更多。

如果出现表 5 的投资预测情况时, 无论丁投资哪种产品, 获利结果均相同。看似选择哪种产品均可, 但根据丁的投资方案对下一次的投资情况进行预测, 结果列于表 6。从表 6 可以看出, 虽然此次投资哪种产品均获利相同, 但当他投资 A 产品时, 会使下次的投资获得更多利益, 那么, 丁此次的最佳选择应为 A 产品。

表 5　投资预测情况

Table 5　Investment prediction

投资人 Investor	投资方案 Scheme	投资人 Investor	投资方案 Scheme
甲 The first	B	丙 The third	B
乙 The second	A	戊 The fifth	B

表 6　丁下次投资的最大收益

Table 6　The maximal profit of the fourth investor's next investment

丁本次投资产品 Investment products	丁下次投资收益 Profit
A	15
B	7.5

利用方程(5)、(6)、(7)、(8)将历史数据进行还原, 发现其正确率为 78.6%, 由于此组数据的线性关系并不十分显著, 从方程中得出的投资人之间的影响系数存在为 0 的情况。若投资人间的相关性更强一些, 方程会更加准确, 还原正确率也会更高。但对于投资规律不明显, 且又是随机现象的投资群体, 正确率达到 78.6% 已属不易。

4　结　论

对少数者博弈问题的现有研究中, 部分人认为此问题没有普遍解。在利用模仿效应解决此类问题时, 必须人为的给决策人指定一个或两个模仿对象, 其条件较为特殊。在本研究中, 决策人可根据所有决策人的历史决策来做出自己的选择, 决策方法更具一般性。

应当注意到, 应用最小二乘法确定每个决策人的预期决策方程时, 当出现 $a_{ik} = 0$, 表示第 k 个决策人对第 i 个决策人的决策影响不大, 但这并不影响预测的进行。考虑到少数者博弈过程中, 部分决策人在不同时间会选择不同的决策方案, 为了使预测更加准确, 预测过程中历史决策数据应选择近期的, 尽量少用相隔时间长的数据。

本模型可适用于任何历史数据足够的不完全信

息下少数者博弈问题的决策。

[参考文献]

[1] 潘天群. 博弈生存[M]. 北京: 中央编译出版社, 2002. 125- 130.
[2] 汪秉宏, 全宏俊, 王卫宁, 等. 混合少数者博弈模型中的模仿效应研究[J]. 非线性动力学报, 2001, (8): 328- 333.
[3] 中山大学数学力学系. 概率论及数理统计[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980. 203- 237.
[4] 许庆瑞. 管理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.

Least square solution for Minority Game

LIU Ya-xiang, SUN Hong-gang, WANG Nai-xin
(*College of Life Science, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shannxi 712100, China*)

Abstract: This paper studies the problem of Minority Game and finds a new solution about it. First, it establishes a theory of game model about profit between policy makers. Second, it establishes every policy maker's decision equation with history data, and figures out the equation by method of least square. Then it confirms every policy maker's decision making. At last it confirms the policy maker's best decision making by theory of game model.

Key words: Minority Game; scheme of decision making; method of least square

·简 讯·

2001年《西北农林科技大学学报(自然科学版)》总被引频次在陕西省高校学报中名列第3名

据中国科学技术信息研究所编辑出版的《2002年版中国科技期刊引证报告》, 2001年在作为统计源期刊入编该书的陕西省19家高校学报中, 本刊以总被引频次299次位列等3名, 在全国入编该书的1 447种科技期刊中名列第317位。详见表1。

表1 陕西省高校学报2001年总被引频次和影响因子排名

名次	刊 名	总被引频次		影响因子	
		次数	在全国排名	因子	在全国排名
1	第四军医大学学报	1 615	16	0.919	33
2	西安交通大学学报	427	189	0.283	476
3	**西北农林科技大学学报(自然科学版)**	**299**	**317**	**0.226**	**625**
4	西安电子科技大学学报	222	453	0.239	593
5	西安交通大学学报医学版	205	488	0.111	1 059
6	西北大学学报	196	520	0.171	808
7	陕西师范大学学报	184	550	0.263	522
8	西北工业大学学报	117	766	0.133	962
9	长安大学学报(自然科学版)	78	976	0.086	1 177
10	西安建筑科技大学学报	65	1 054	0.116	1 041
11	西安石油学院学报	63	1 068	0.100	1 110
12	西安工程学院学报	56	1 111	0.087	1 171
13	西北轻工业学院学报	38	1 246	0.047	1 340
14	西安理工大学学报	37	1 256	0.096	1 125
15	陕西工学院学报	23	1 356	0.068	1 255
16	西北纺织工学院学报	23	1 356	0.031	1 400
17	西安工业学院学报	20	1 374	0.048	1 338
18	西北建筑工程学院学报	16	1 398	0.055	1 313
19	空军工程大学学报	15	1 404	0.053	1 321

(温晓平 供稿)