

梯度神经网络的H-稳定性^{*}

冯芙叶¹, 赵高长¹, 张仨举

(1 西安科技学院 理学院, 陕西 西安 710054; 2 西安建筑科技大学 理学院, 陕西 西安 710055)

[摘 要] 给出总体极小化问题的神经网络模型, 分析了网络的电路实现。证明了网络平稳点集合的全局H-稳定性, 从而有效地解决了网络的可靠运行问题。

[关键词] 神经网络; 全局H-稳定性; 平衡点集

[中图分类号] TP273 [文献标识码] A

[文章编号] 1671-9387(2003)01-0145-03

自从Hopfield提出神经网络算法以来^[1], 已有大量研究文献考虑了优化问题的神经网络求解^[2~6], 方法是将网络平衡点集与某规划问题最优解集对等, 通过对平衡点的稳定性分析来决定网络是否能够稳定地收敛于某最优解。从现有结果看, 当目标函数及其约束能够对应于某凸函数时, 用神经网络方法就能很好地解决优化问题, 如线性规划^[2~4]、凸规划^[5~6]等。冯芙叶^[7]对凸函数的最优解集与凸梯度网络的极限点集间的关系进行了研究。当目标函数非凸时, 这方面研究甚少, 其难点在于网络的稳定性分析还没有明确答案^[8]。本研究通过对无约束非凸规划问题的神经网络方法的稳定性分析, 给出了网络模型与电路实现, 并证明了网络的H-稳定性。

1 网络与实现

1.1 梯度网络

考虑 R^n 上的总体极小化问题: $\min f(x), x \in R^n$ 的下列神经网络求解

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x) \quad (1)$$

这里 $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 是 f 的梯度。问题有解的一个充分条件由下面的引理1给出。

引理1 在集 $M \subset R^n$ 上有定义的连续函数 $f: M \rightarrow R$ 的一个水平集 $S(f, \alpha) = \{x | f(x) \leq \alpha\}$ 非空有界, 当且仅当 f 的最小值点集 S^* 非空且有界。

证明 设 $S(f, \alpha)$, 显然 $S(f, \alpha)$ 为闭集。由其有界性知它是紧集; 又 f 在其上连续, 故必在 $S(f, \alpha)$

上有最小值 $f(x^*)$ 存在。而此 $f(x^*)$ 也是 f 在 M 上的最小值, 因为若 $x \in S(f, \alpha)$, 则 $f(x) \geq f(x^*)$; 若 $x \notin S(f, \alpha)$, 则 $f(x) > \alpha \geq f(x^*)$, 故 S^* 非空; S^* 有界可由 $S^* \subset S(f, \alpha)$ 以及 $S(f, \alpha)$ 的有界性得到。

反之, 若 S^* 非空有界, 取 $x^* \in S^*$ 并令 $\alpha = f(x^*)$, 则 $S(f, \alpha) = \{x | f(x) \leq \alpha\} = S^*$ 有界, 引理1证毕。

1.2 块流程图

网络(1)的电路块状流程图见图1。

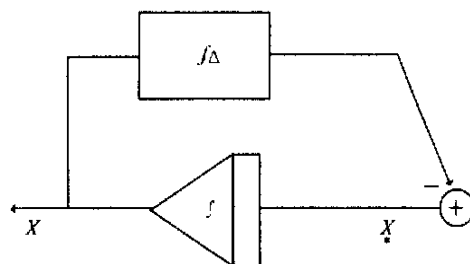


图1 网络1的块流程

Fig 1 Block diagram of neural network 1

其中, $\int$ 为积分比例单元; ∇F 为反馈网络单元。网络的动力学行为由(1)式描述。

2 稳定性分析

2.1 L-稳定性与H-稳定性

一个一般的网络系统是指

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2)$$

其平衡点是指 $f(x) = 0$ 的点。由于后文的需要, 兹将一些熟知的有关Lyapunov稳定性的基本概念罗

* [收稿日期] 2001-01-15

[基金项目] 陕西省教育厅专项基金资助项目(01JK201)

[作者简介] 冯芙叶(1963-), 女, 陕西大荔人, 副教授, 主要从事微分方程与最优化理论研究。

列如下。

设 $\bar{x}$ 是 (2) 式的一个平衡点, 若对 $\bar{x}$ 的每个邻域 U , 有 $\bar{x}$ 的另一个邻域 U_1 , 使对每个以 $x \in U_1$ 为初值的解 $x(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 有定义, 且 $x(t)$ 在 U 中, 则称 $\bar{x}$ 为稳定平衡点; 如果 $\bar{x}$ 稳定且 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$, 则称 $\bar{x}$ 渐近稳定。

轨线 $x(t)$ 的 ω 极限集定义为 $\Omega(x) = \{y \mid y = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n), t_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty\}$; α 极限集 A 定义为 $A(x) = \{y \mid y = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n), t_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty\}$ 。

为了研究网络 (1) 的稳定性, 除 Lyapunov 稳定性外, 还需引入网络 Hopfield 稳定的数学定义, 称之为 H-稳定性。

定义 1 对 $x \in R^n, S \subset R^n$, 令 $\rho(x, S) = \inf\{\|y - x\| : y \in S\}$, 称集合 S 关于网络 (2) 是全局 H-稳定的: 若 $\rho(x(t), S) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, 这里 $x(t)$ 是网络 (2) 的任何以 $x \in W$ 为初值的解曲线; 更进一步, 若任意从 W 中出发的解 $x(t), x(0) = x \in W$, 对所有 $t \geq 0$ 有定义且吸引到 S , 即存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p \in S$, 则称网络 (1) 是全局强 H-稳定的。这里 W 为 R^n 中的开区域。

这里定义的 H-稳定性涵义与前面的 Lyapunov 稳定性涵义是完全不同的, 从数值计算的目的考虑, 用网络的动力学曲线逼近集合 S 仅要求网络全局 H-稳定已经足够。强 H-稳定是指 M 吸引全部轨线, 它显然蕴含了 H-稳定性, 其物理实质是: 对网络任意一个输入, 都将产生一个明确的输出; 当然, 一个集合若是全局 Lyapunov 渐近稳定的, 它也必是强 H-稳定的。

2.2 网络 (1) 的全局 H-稳定性

考虑用网络 (1) 求解极小化问题时网络的稳定性, 以 S^* 记问题的最优解集, 即 $S^* = \{x^* \mid f(x^*) \leq f(x), x \in R^n\}$; 并令 $M^* = \{x^* \mid \nabla f(x^*) = 0\}$, 则有下面的稳定性结果。

定理 设对每个 $c \in R$, 集合 $f^{-1}(-\infty, c]$ 是紧集, 则有

- (a) f 的总体极小值点集 S^* 非空且 $S^* \subset M^*$ 。
- (b) 式 (1) 的每个解对所有 $t \geq 0$ 有定义。
- (c) 集 M^* 是全局 H-稳定的; 更进一步, 若 M^* 由孤立点组成, 则它是强 H-稳定的。

证明 (a) 由引理 1 可得。

(b) 考虑 (1) 从紧集 $K = f^{-1}(-\infty, c]$ 内出发的解 $x(t): x(0) \in K, \dot{f}|_{(1)} = \frac{df(x(t))}{dt} =$

$-\nabla f(x(t))^2 \leq 0$, 由此知, $f(x(t)) \leq f(x(0)) \leq c$, 故 $x(t) \in K, t \geq 0$, 即从 K 内出发的解恒停留于紧集 K 内, 由微分方程解的延拓定理知 $x(t)$ 的存在区间为 $[0, \infty)$ 。取 $c = f(x)$ 即知任何以 x 为初值的解曲线对所有 $t \geq 0$ 有定义, (b) 证毕。

为了证明 (c), 还需如下引理。

引理 2^[9] 网络 (2) 的任何有界轨线 $x(t)$ 的 ω (α) 极限集 $\Omega(x)$ ($A(x)$) 是一非空、有界、不变的连通闭集。

引理 3 若 y 是 (1) 式某轨线的 ω 极限点或 α 极限点, 则有 $\nabla f(y) = 0$ 。

证明 由于 $f(x(t))$ 是 $t \geq 0$ 的单调不增连续函数, 从而对任意的 $y \in \Omega(x)$ 有

$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x(t_n)) = \inf f(x(t)) = \alpha_0$, 再由 $\Omega(x)$ 的不变性知 $y(t) \in \Omega(x)$, 故有

$f(y(t)) = \alpha_0$, 因此 $\dot{f}|_{(1)}(y(t)) = 0 = -\nabla f(y)^2$, 引理 3 证毕。

下面考虑 (c) 的证明。

由 $x(t) \in f^{-1}(-\infty, f(x)]$ 知, $x(t)$ 有界, 下证 $\rho(x(t), \Omega) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 。否则的话, 就有 $t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ 使 $\rho(x(t_n), \Omega) \rightarrow 0$ 不成立, 与 $\Omega(x)$ 的定义矛盾; 再由引理 3 知 $\Omega(x) \subset M^*$, 故有 $\rho(x(t), M^*) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, 由 x 的任意性即知, M^* 是全局 H-稳定的。如果 M^* 由孤立点组成, 则对任何 $\Omega(x)$, 由引理 3 及引理 2 的连通性知它是由一点组成的, 从而 $x(t_n)$ 的极限点唯一, 即对所有 $t_n \rightarrow \infty$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p \in \Omega(x)$ 成立, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$ 。定理 (c) 证毕。

推论 1 若 $f(x)$ 是凸函数, 则由网络 (1) 求解极小化问题 $\min f(x), x \in R^n$ 时, 网络是全局 H-稳定的。

证明 由于对凸函数 $f(x)$ 有 $S^* = M^*$ ^[8], 由定理立得 S^* 的全局 H-稳定性。

推论 2 若 $f(x)$ 的平稳点有限, 则网络 (1) 全局强 H-稳定收敛到 $f(x)$ 的平稳点集。

3 结论

从上面的稳定性定理及其推论不难发现, 利用网络 (1) 求解最优化问题时, 网络可以全局 H-稳定地收敛到目标函数的所有临界点集。特别是当网络的平稳点集有限时, 它可以强 H-稳定地收敛到某个平稳点。因此, 网络 (1) 可以解决目标函数的平稳点求解, 其收敛性是无可置疑的。

[参考文献]

- [1] Hopfield J J, Tank D W. Simple neural networks: an A/D converter signal decision circuits and a linear programming circuit[J]. Circuits and Systems, 1986, 33(5): 533- 541.
- [2] Maa C Y, Shanblatt M A. Linear and quadratic programming neural network analysis[J]. Neural Networks, 1992, 3(4): 580- 594
- [3] Xia You-shen. A neural network for solving linear programming[J]. Neural Networks, 1996, 7(2): 525- 527.
- [4] Xia You-shen. A new neural network for solving linear programming and quadratic programming problems[J]. Neural Networks, 1996, 9(6): 1544- 1547.
- [5] Wang Jun. A deterministic annealing neural network for convex programming[J]. Neural Networks, 1994, 7(4): 629- 641.
- [6] Xia You-shen, Wang Jun. A general methodology for designing globally convergent optimization neural networks[J]. Neural Networks, 1998, 9(6): 1331- 1343
- [7] 冯芙叶. 凸函数极小值点集与梯度神经网络的极限点集[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2001, 29(3): 115- 116
- [8] 司 昕, 安燮南. 优化计算的神经网络模型[J]. 电路与系统学报, 1999, 4(3): 58- 63
- [9] 尤秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982

On the H-Stability of the gradient neural networks

FENG Fu-ye¹, ZHAO Gao-chang¹, ZHANG Quan-ju²

(1 School of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi 710054, China;

2 School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an, Shaanxi 710055, China)

Abstract Neural networks for problems of the global optimization are proposed in this paper and the global convergence of the equilibrium point set is also proven. The results obtained present the reliable action for the neural networks

Key words: neural networks; H-stability; equilibrium point

(上接第 126 页)

Study on forecasting and control threshold of *Drosicha corpulenta* (Kuwana)WANG Xiao-ji¹, GAO Cun-lao¹, ZHANG Jun-ling¹, YANG Da-hong¹, WANG Di-tao², LIU Xing-quan²

(1 Forest Insect and Disease Quarantine Station, Xi'an, Shaanxi 710061, China;

2 Forest Insect and Disease Quarantine Station, Huxian, Shaanxi 710300, China)

Abstract This paper deals with forecasting techniques and control threshold of *Drosicha corpulenta* (Kuwana), and studies the applications of distance-period forecast, damage-grade forecast and enemy control-capability forecast in the scale. The results show that the regression model of average scale density (x) and average budding rate (y_1) is $y_1 = 95.36 - 39.18x$; the model of average scale density (x) and average rate (y_2) is $y_2 = 0.08 + 21.71x$; the model of average scale density (x) and timber loss rate (y_3) is $y_3 = 0.737 + 25.46x$. At last, we determine $0.16 \text{ scale cm}^{-2}$ of the control threshold, and put up the grading standard IPM techniques of the scale

Key words: *Drosicha corpulenta* (Kuwana); forecasting; control threshold