第 30 卷　第 6 期　　西北农林科技大学学报（自然科学版）　　Vol. 30 No. 6
2002 年 12 月　　Jour. of Northwest Sci-Tech Univ. of Agri. and For. (Nat. Sci. Ed.)　　Dec. 2002

一类多分子反应模型的定性探讨*

张 远 迎

（西北农林科技大学 生命科学学院，陕西 杨陵 712100）

［摘　要］　研究了一类多分子反应模型的稳定性问题，并指出在参数的不同范围内模型极限环的存在性。

［关键词］　多分子反应模型；极限环；稳定性

［中图分类号］　O175.12　　［文献标识码］　A　　［文章编号］　1671-9387（2002）06-0234-03

文献［1］提出了一类多分子反应模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \delta - ax - x^p y^q, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^p y^q - by。\end{cases} \tag{1}$$

文献［2］等许多文章研究了 $a=0$，p 和 q 为不等的正整数时（1）式的定性问题。本文探讨了 $a\neq 0$，$p=1$，$q=2$ 时的（1）式。这类系统可写成：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \delta - ax - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy^2 - by。\end{cases} \tag{2}$$

其中，$\delta>0$，$a>0$，$b>0$。

对（2）式作变换：

$$x = b^2\delta^{-1}\bar{x},\ y = b^{-1}\delta\bar{y},\ t = b^2\delta^{-2}\bar{t}。$$

则（2）式可化为（仍以 x，y，t 记 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{t}$）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \alpha\beta x - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y(xy-1)。\end{cases} \tag{3}$$

其中，$\alpha=b^3\delta^{-2}>0$，$\beta=ab^{-1}>0$。基于（3）式的实际意义，本研究均在区域 $G=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ 内进行讨论。

（3）式在 $\alpha\beta>\frac{1}{4}$ 时，有 1 个正奇点 $(\frac{1}{\alpha\beta}, 0)$；在 $\alpha\beta=\frac{1}{4}$ 时，有 2 个正奇点（4，0）和（2，1/2）；在 $\alpha\beta<\frac{1}{4}$ 时，有 3 个正奇点，记为 $A\ (\frac{1}{\alpha\beta}, 0)$，$R\ (x_1, y_1)$，$N\ (x_2, y_2)$，其中 R，N 的坐标满足 $xy=1$，$y_1=\frac{1+\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2}$，$y_2=\frac{1-\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2}$。以下就 $\alpha\beta<\frac{1}{4}$ 进行讨论。

（3）式的线性近似矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\alpha\beta-y^2 & -2xy \\ \alpha y^2 & 2\alpha xy-\alpha \end{bmatrix}。$$

在奇点 A，R 和 N 处的线性近似方程的特征方程分别为

$$(\lambda+\alpha\beta)(\lambda+\alpha)=0, \tag{4}$$

$$\lambda^2+(\alpha\beta+y_1^2-\alpha)\lambda+\alpha y_1^2-\alpha^2\beta=0, \tag{5}$$

$$\lambda^2+(\alpha\beta+y_2^2-\alpha)\lambda+\alpha y_2^2-\alpha^2\beta=0。\tag{6}$$

由（4）式知，A 为稳定的结点；由（5）式知，R 为焦点或结点，当 $\alpha\leq\frac{1}{2}$ 或 $\beta<\frac{1}{2}$ 且 $\frac{1}{2}<\alpha<1-\beta$，即在以 β，α 为横纵坐标平面上，$(\beta,\alpha)\in D_1$ 时，R 为稳定的焦点或结点，当 $\beta<\frac{1}{2}$ 且 $1-\beta<\alpha$，即 $(\beta,\alpha)\in D_2$ 时，R 为不稳定的焦点或结点（图 1）；由（6）式知，N 为鞍点。

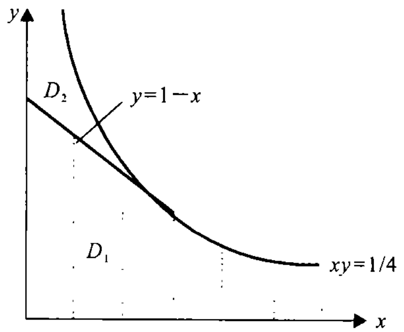

图 1　系统（1）奇点 R 的稳定性区域

Fig. 1　Stabilty region of R

1　极限环的不存在性

记 $P(x,y)=1-\alpha\beta x-xy^2$，$Q(x,y)=\alpha y(xy-1)$，则（3）式为 $\frac{dx}{dt}=P(x,y)$，$\frac{dy}{dt}=Q(x,y)$。

定理 1　当 $\beta\geq 1$ 时，（3）式没有闭轨线。

---

*　［收稿日期］　2001-10-09

［作者简介］　张远迎（1960-），女，陕西长安人，副教授，主要从事基础数学教学工作。

证明　由于 $y=0$ 是 (3) 式的解, $x=0$ 是 (3) 式的无切直线, 故 (3) 式若有闭轨线, 其必不与 $x=0$ 和 $y=0$ 相交。作 Dulac 函数 $B(x,y)=y^{-2}$, 则有

$$\mathrm{div}(BP,BQ)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{\alpha\beta x}{y^2}-x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha x-\frac{\alpha}{y}\right)=-y^{-2}[y^2+\alpha(\beta-1)]。$$

上式在 $\beta-1\geq0$, 即 $\beta\geq1$ 时保持常号。定理得证。

引理　(3) 式若有闭轨线, 其必与直线 $x=1/\alpha$ 和 $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ $(0<\beta<1)$ 相交。

证明　由于 $y=0$ 是 (3) 式的解, $x=0$ 是 (3) 式的无切直线, 故 (3) 式若有闭轨线, 其必不与 $x=0$ 和 $y=0$ 相交。作 Dulac 函数 $B(x,y)=x^{-1}y^{-2}$, 则有

$$\mathrm{div}(BP,BQ)=\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}y^{-2}-\alpha\beta y^{-2}-1)+\frac{\partial}{\partial y}(\alpha-\alpha x^{-1}y^{-1})=-\alpha x^{-2}y^{-2}\left(\frac{1}{\alpha}-x\right)。$$

故由 Dulac 函数法知 (3) 式若有闭轨线, 其一定与 $x=1/\alpha$ 相交。

记 $l(x)=x-\frac{1}{\alpha}$, 则对 (3) 式, $\left.\frac{dl}{dt}\right|_{l=0}=1-\beta-\frac{1}{\alpha}y^2$, 故直线 $x=\frac{1}{\alpha}$ 在直线 $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ $(0<\beta<1)$ 的上方和下方分别是无切的, 而 (3) 式的闭轨线必和 $x=\frac{1}{\alpha}$ 相交, 所以 (3) 式的闭轨线必交于 $x=\frac{1}{\alpha}$ 两点, 其中 1 点位于 $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ 之上, 1 点位于 $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ 之下, 从而知 (3) 式的闭轨线必和直线 $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ 相交。

定理 2　设 $\alpha_0=\frac{16(1-\beta)^3}{(3-4\beta^2)^2}$, 则当 $0<\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\alpha>\alpha_0$ 时, (3) 式没有闭轨线。

证明　由引理知, (3) 式若有闭轨线, 其一定和直线 $x=\frac{1}{\alpha}$, $y=\sqrt{\alpha(1-\beta)}$ $(0<\beta<1)$ 相交。作过上述两直线交点的曲线 C: $xy=\sqrt{\frac{1-\beta}{\alpha}}$ (图 2), 则 (3) 式若有闭轨线 Γ, Γ 必和曲线 C 相交于 A, B 两点, 而方向场在 A 和 B 处分别指向区域 D_1, D_2 内, 从而在弧 AB 上至少有这样的一点, 使该点处 (3) 式的方向场与曲线 C 的切向相同。

为简单, 记 $W=\sqrt{\frac{1-\beta}{\alpha}}$, 则曲线 C 为 $xy=W$, 在弧 AB 上, 方向场的方向为

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{AB}=\frac{1-\alpha\beta x-xy^2}{\alpha y(xy-1)}=\frac{1-\frac{\alpha\beta W}{y}-Wy}{\alpha y(W-1)}=\frac{y-\alpha\beta W-Wy^2}{\alpha y^2(W-1)}。$$

曲线 C 的切线方向为

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{W}{y^2}。$$

比较这两个方向, 令

$$\frac{y-\alpha\beta W-Wy^2}{\alpha y^2(W-1)}=-\frac{W}{y^2},$$

得方程

$$Wy^2-y+\alpha W(\beta+1-W)=0。\qquad(7)$$

令 $f(y)=Wy^2-y+\alpha W(\beta+1-W)$, 则 $f'(y)=2Wy-1$, 令 $f'(y)=0$, 则有 $y=\frac{1}{2W}$, 而当 $y>\frac{1}{2W}$ 时, $f'(y)>0$, 当 $0<y<\frac{1}{2W}$ 时, $f'(y)<0$, 故 $y=\frac{1}{2W}$ 是 $f(y)$ 的极小值点, 令 $f\left(\frac{1}{2W}\right)>0$, 即 $\frac{W}{4W^2}-\frac{1}{2W}+\alpha W(\beta+1-W)>0$, 解之得 $0<\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\alpha>\alpha_0=\frac{16(1-\beta)^3}{(3-4\beta^2)^2}$, 这说明当 $0<\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\alpha>\alpha_0$ 时, 对一切 $y>0$ 都有 $f(y)>0$, 即对一切 $y>0$, (7) 式无解, 所以当 $0<\beta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\alpha>\alpha_0$ 时, (3) 式无闭轨。

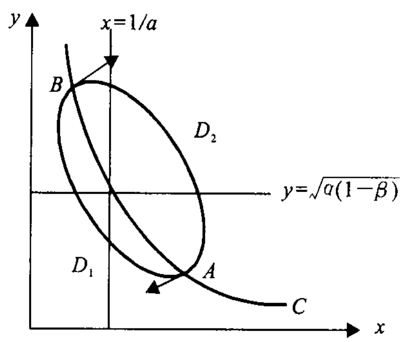

图 2　系统 (1) 闭轨线与曲线 C 交点处方向场

Fig. 2　Closed orbit and curve C intersect in A, B field of direction

2　极限环的存在性

定理 3　当 $\beta<\frac{1}{2}$ 且在 $\alpha<1-\beta$ 充分小时, (3) 式在 R 外围存在极限环。

证明　对 (3) 式作变换 (把坐标原点移到 R 处), 令

$$\xi=1-\alpha\beta x-y,\quad \eta=\alpha x+y-\alpha x_1-y_1,$$

则 (3) 式化为

$$\begin{cases}\frac{d\xi}{dt}=(-\alpha\beta-y_1^2+\alpha)\xi-(2y_1^2-y_1)\eta+\frac{\xi^2+(1+\beta)\xi\eta+\beta\eta^2}{1-\beta}y_1-\varphi(\xi,\eta),\\[2mm] \frac{d\eta}{dt}=\alpha\xi。\end{cases}\qquad(8)$$

其中, $\varphi(\xi,\eta)=\alpha(\beta\xi+\eta)\left[\dfrac{\xi^2+(1+\beta)\xi\eta+\beta\eta^2}{\alpha(1-\beta)^2}-\dfrac{(1+\beta)y_1-1}{\alpha\beta(1-\beta)}\xi-\dfrac{2y_1-1}{\alpha(1-\beta)}\eta\right]$。

对(8)式令

即

$$-\alpha\beta-y_1^2+\alpha=0,$$

则(8)式为

$$\alpha=1-\beta\quad\left(\beta<\frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\alpha(1-2\alpha)\eta+\left(3-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)\xi^2+\left(3-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)\eta^2+\dfrac{3\alpha^3-9\alpha^2+8\alpha-2}{\alpha(1-\alpha)}\xi\eta-\\ \qquad\dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)+1}{\alpha^2}\xi^2\eta-\dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)+1}{\alpha^2}\xi\eta^2-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\xi^3-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\eta^3,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=\alpha\xi\end{cases}\tag{9}$$

对(9)式作变换 $\xi=\bar{\xi},\ \eta=\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha-1}}\bar{\eta}$ 则(9)式化为(仍以 ξ,η 记 $\bar{\xi},\bar{\eta}$):

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-\alpha\sqrt{2\alpha-1}\,\eta+\left(3-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)\xi^2+\dfrac{3\alpha-\alpha^2-1}{\alpha(2\alpha-1)}\eta^2+\dfrac{3\alpha^3-9\alpha^2+8\alpha-2}{\alpha(1-\alpha)\sqrt{2\alpha-1}}\xi\eta-\\ \qquad\dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)+1}{\alpha^2\sqrt{2\alpha-1}}\xi^2\eta-\dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)+1}{\alpha^2(2\alpha-1)}\xi\eta^2-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\xi^3-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2\sqrt{(2\alpha-1)^3}}\eta^3,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=\alpha\sqrt{2\alpha-1}\,\xi\end{cases}\tag{10}$$

对(10)式由文献[3]计算焦点量:

$$P_4=\frac{6\alpha^4-20\alpha^3+29\alpha^2-18\alpha+4}{8[\alpha(2\alpha-1)]^2}>0。\quad(1/2<\alpha<1)$$

故由(10)式知(8)式的原点是不稳定的,也就是(3)式的奇点 R 当 $\beta<1/2$ 且 $\alpha=1-\beta$ 时,是不稳定的焦点;当 $\beta<1/2$ 且 $\alpha<1-\beta$ 时,R 为稳定的焦点,因此当 $\beta<1/2$ 且 $\alpha<1-\beta$ 充分小时,(3)式在 R 外存在不稳定极限环[4]。故定理得证。

本研究给出了参数 α,β 在部分区域上极限环的存在性与不存在性,而极限环存在是否惟一及在其他区域极限环的存在性和惟一等问题还需要进一步的讨论。

[参考文献]

[1]　陈兰荪,陈　键. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[2]　阳平华,徐　瑞. 一类多分子反应模型的定性分析[J]. 高校应用数学学报, 1990, (2): 193-201.

[3]　Gobben F, Willamowski K D. Liapuno approach to multiple Hopf bifurcation [J]. Journal of Mathemtical Analysis and Application, 1979, 71: 333-350.

[4]　叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1984.

On qualitative analysis of a multimolecules model

ZHANG Yuan-ying

(*College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China*)

Abstract: A multimolecules model was studied and the result is that there does not have a limit cycle if $\beta\geq 1$ or $0<\beta<\sqrt{3}/2$ and $\alpha>16(1-\beta)^3/(3-4\beta^2)^2$, there has limit cycle if $\beta<1/2$ and $\alpha<1-\beta$ is very small.

Key words: multimolecules model; limit cycle; stability