种群及瓜螟种群存亡规律的探讨*

史美英, 刘光祖, 郑立飞
(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘 要] 采用数学方法分析了自然条件下某生物种群的寿命分布, 得到了种群寿命分布函数和种群内禀死亡常数, 并由此推导出了种群寿命的数学期望和方差。并以瓜螟种群试验资料, 拟合了瓜螟第二、三代寿命分布函数, 拟合效果较好。

[关键词] 种群; 寿命分布; 分布函数; 内禀死亡常数; 数学期望
[中图分类号] S11+4 [文献标识码] A [文章编号] 1671-9387(2002)05-0117-04

生活在自然界中的任何一种生物种群个体的生存与死亡, 都由该种群个体自身生存能力与周围环境条件所决定。探讨种群的自然存亡规律与现代人的生产、生活密切相关, 如它对森林及作物病虫害的预测和防治、城市和农村生态环境监测、发展现代农业等都具有重要意义。本研究利用数学方法探讨在自然条件下的某种群个体的寿命分布, 得到了该种群寿命分布的概率模型[1~3], 即种群自然存亡规律, 并且以瓜螟种群的试验资料[4,5], 拟合了它的第二、三代寿命分布。

1 种群寿命分布的概率模型

对于一个种群而言, 其个体寿命是随机的, 用随机变量 X 表示, X 的分布函数 $F(t)=P\{X\le t\}$ 表示该种群个体在时刻 t (可理解为年龄 t) 及其以前死亡的概率。如果种群个体已存活了 t 龄 (t 龄即年龄, 指 t 个单位寿命, 不同种群寿命单位取法不同, 有的取年, 有的取月、周、天等), 它在以后的年龄区间 $(t, t+\Delta t]$ 内死亡的概率为 $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$ [$o(\Delta t)$ 是 Δt 的高阶无穷小, 当 $\Delta t\to 0$], 其中 $\lambda(t)$ 称为种群死亡风险函数。将 X 看作连续型随机变量, 则条件概率

$$P\{t<X\le t+\Delta t \mid X>t\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t), \tag{1}$$

即

$$\frac{P\{t<X\le t+\Delta t\}}{P\{X>t\}}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t), \tag{2}$$

从而有

$$F(t+\Delta t)-F(t)=[1-F(t)][\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)]。$$

对 $\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=[1-F(t)][\lambda(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}]$, 令 $\Delta t\to 0$ 时, 等号左右两端取极限得

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda(t)[1-F(t)],$$

即

$$\frac{\mathrm{d}[1-F(t)]}{1-F(t)}=-\lambda(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

对 (3) 式等号左右两端从 0 到 t 取积分, 并注意到 $F(0)=0$, 则得

$$1-F(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u}, \tag{4}$$

$$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u}, \tag{5}$$

式 (4)、(5) 分别表示该种群个体在时刻 t 及其以前存活的概率与死亡的概率。

设种群死亡风险函数的变化率与同时刻 t 的死亡风险成反比, 则有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\lambda(t)} \text{(比例系数 } k>0), \tag{6}$$

其中, k 称为种群内禀死亡风险常数。解微分方程 (6), 得其通解

$$\lambda^2(t)=2kt+C. \tag{7}$$

又注意到, 当 $t=0$ 时, $C=\lambda^2(0)$, 所以方程 (6) 的特解为 $\lambda^2(t)=2kt+\lambda^2(0)$, 且死亡风险函数为

$$\lambda(t)=\sqrt{2kt+\lambda^2(0)}. \tag{8}$$

将 (8) 式代入 (4) 式, 得种群存活函数为

$$1-F(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3k}[(2kt+\lambda^2(0))^{\frac{3}{2}}-\lambda^2(0)]},$$

* [收稿日期] 2002-03-25
[作者简介] 史美英 (1948-), 女, 陕西大荔人, 副教授, 主要从事高等数学应用研究。

从而, 种群死亡函数即种群寿命分布函数为

$$F(t)=1-e^{\frac{1}{3k}\lambda^2(0)}e^{-\frac{1}{3k}[2kt+\lambda^2(0)]^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

对(9)式关于 t 求导数, 得种群寿命 X 的概率密度(即分布密度)为

$$f(t)=\sqrt{2kt+\lambda^2(0)}\,e^{\frac{1}{3k}\lambda^2(0)-\frac{1}{3k}[2kt+\lambda^2(0)]^{\frac{3}{2}}}, \tag{10}$$

其图形称为该种群的寿命分布曲线。

特别地, 若 $\lambda(0)=0$, 则(9)式和(10)式分别为

$$F(t)=1-e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{\frac{3}{2}}}, \tag{11}$$

$$f(t)=\sqrt{2kt}\,e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{\frac{3}{2}}} \tag{12}$$

至此, 得到了种群寿命分布函数(9)式和(11)式, 而且得到了种群寿命的概率密度(10)式和(12)式, 即得到了种群寿命的概率模型。

2　种群寿命的概率性质

种群寿命 X 的数学期望　$E(X)=\frac{1}{\sqrt[3]{3k}}\Gamma(\frac{2}{3})$。

证: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}t\sqrt{2kt}\,e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$,

令 $\frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{\frac{3}{2}}=u$, 则

$$E(X)=\frac{\sqrt[3]{9k^2}}{2k}\int_0^{\infty}u^{\frac{2}{3}}e^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt[3]{9k^2}}{2k}\Gamma(\frac{5}{3})=\frac{1}{\sqrt[3]{3k}}\Gamma(\frac{2}{3})。$$

种群寿命 X 的方差　$D(X)=\frac{1}{\sqrt[3]{9k^2}}[\Gamma(\frac{1}{3})-\Gamma^2(\frac{2}{3})]$。

证: 由于 $E(X)=\frac{1}{\sqrt[3]{3k}}\Gamma(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt[3]{9k^2}}{2k}\Gamma(\frac{5}{3})$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}t^2f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t^2\sqrt{2kt}\,e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=\frac{3\sqrt[3]{3k}}{4k}\Gamma(\frac{7}{3}),$$

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3\sqrt[3]{3k}}{4k}\Gamma(\frac{7}{3})-\frac{3\sqrt[3]{3k}}{4k}\Gamma^2(\frac{5}{3})=\frac{3\sqrt[3]{3k}}{4k}[\Gamma(\frac{7}{3})-\Gamma^2(\frac{5}{3})]=\frac{1}{\sqrt[3]{9k^2}}[\Gamma(\frac{1}{3})-\Gamma^2(\frac{2}{3})]。$$

由种群寿命 X 的数学期望及方差可知, 生物种群在其龄区 $(E(X)-\sqrt{D(X)}, E(X)+\sqrt{D(X)})$ 内死亡的概率为

$$F(E(X)+\sqrt{D(X)})-F(E(X)-\sqrt{D(X)})=$$
$$e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}[E(X)-\sqrt{D(X)}]^{\frac{3}{2}}}-e^{-\frac{2\sqrt{2k}}{3}[E(X)-\sqrt{D(X)}]^{\frac{3}{2}}}=$$
$$e^{-(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}[\Gamma(\frac{2}{3})-\sqrt{\Gamma(\frac{1}{3})-\Gamma^2(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}}]^{\frac{2}{3}}}-e^{-(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}[\Gamma(\frac{2}{3})+\sqrt{\Gamma(\frac{1}{3})-\Gamma^2(\frac{2}{3})}]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=0.8555-0.1547=0.7008$$

因此, 在生物种群寿命龄区 $(E(X)-\sqrt{D(X)}, E(X)+\sqrt{D(X)})$ 内, 种群个体死亡率约为70%。

3　瓜螟种群的寿命分布

由瓜螟种群的第二代试验资料[4,5], 估计(10)式中参数 k, 得到瓜螟种群第二代死亡率见表1。

表1　瓜螟第二代种群死亡率

Table 1　Population death rate of the second generation melon borers

t/d	死亡率 Death rate		t/d	死亡率 Death rate	
	试验值 Trial value	理论值 Theoretical value		试验值 Trial value	理论值 Theoretical value
1	0	0.031	16	0.863	0.863
2	0.124	0.084	17	0.879	0.887
3	0.228	0.149	18	0.885	0.907
4	0.314	0.22	19	0.892	0.924
5	0.377	0.294	20	0.896	0.938
6	0.414	0.367	21	0.901	0.95
7	0.467	0.438	22	0.918	0.96
8	0.505	0.505	23	0.934	0.968
9	0.538	0.568	24	0.944	0.974
10	0.613	0.626	25	0.962	0.980
11	0.671	0.678	26	0.975	0.984
12	0.719	0.725	27	0.984	0.987
13	0.749	0.767	28	0.991	0.990
14	0.779	0.804	29	0.997	0.994
15	0.836	0.836	30	0.998	0.994

利用回归分析方法估计 k 值, 将(11)式变形为

$$1-F(t)=e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2k}t^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

对(13)式两边取对数, 且令 $U = \ln[1 - F(t)]$, $V = t^{\frac{3}{2}}$, $A = -\frac{2}{3}\sqrt{2k}$, 则(13)式线性化为 $U = AV$, 这时 A 的 LS 估计为

$$\hat{A} = \frac{\sum U_i V_i}{\sum V_i^2}. \tag{14}$$

因 X 为连续型随机变量, 在 $V_i^{\frac{3}{2}}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, 30)$ 的计算中为使 t_i 更具代表性, 故取年龄区间 (t_{i-1}, t_i) 的中值为 t_i 值, 经计算得

$$\sum_{i=1}^{30} U_i V_i = -6\,284.746\,4,$$

$$\sum_{i=1}^{30} V_i^2 = \sum_{i=1}^{30} t_i^3 = 202\,387.5,$$

从而得 $\hat{A} = -0.031\,053$, $\hat{k}_2 = 0.001\,085$, $\hat{k}_2$ 是瓜螟种群第二代的内禀死亡常数 k_2 的估计值。有了瓜螟种群内禀死亡常数 k_2 的估计值, 也就得到了瓜螟种群第二代的寿命分布密度,

$$f_2(t) = \sqrt{2 \times 0.001\,085\, t}\; e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001\,085}\, t^{\frac{3}{2}}}, \tag{15}$$

同时, 得到瓜螟第二代个体在时刻 t 及其以前死亡和存活的概率分别为

$$F_2(t) = 1 - e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001\,085}\, t^{\frac{3}{2}}}, \tag{16}$$

$$1 - F_2(t) = e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001085}\, t^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

由(16)式可得瓜螟第二代种群死亡理论值(表 1), 其相关指数 $r_2^2 = 0.935$, 这表明(16)式与实测值拟合较好。而由 $\hat{E}(X) = \frac{1}{\sqrt[3]{3k}}\Gamma(\frac{2}{3}) = 9.2$ 知, 瓜螟第二代种群个体寿命平均不到 10 d。

由瓜螟第三代种群死亡率资料[4, 5], 同样可得到其死亡率概率分布(表 2)。

表 2　瓜螟第三代种群死亡率

Table 2　Population death rate of the 3rd generation melon borers

t/d	死亡率 Death rate 试验值 Trial value	死亡率 Death rate 理论值 Theoretical value	t/d	死亡率 Death rate 试验值 Trial value	死亡率 Death rate 理论值 Theoretical value
1	0	0.035	16	0.934	0.896
2	0.220	0.095	17	0.942	0.916
3	0.335	0.168	18	0.946	0.933
4	0.416	0.246	19	0.951	0.946
5	0.474	0.326	20	0.955	0.957
6	0.517	0.405	21	0.958	0.967
7	0.564	0.480	22	0.964	0.974
8	0.614	0.550	23	0.966	0.980
9	0.652	0.614	24	0.971	0.984
10	0.725	0.673	25	0.977	0.989
11	0.775	0.724	26	0.984	0.991
12	0.831	0.769	27	0.989	0.993
13	0.874	0.809	28	0.994	0.995
14	0.906	0.843	29	0.996	0.996
15	0.923	0.871			

由表 2 估计 k 值, 方法与前面类似, 这里估得 $\hat{A}_3 = \frac{-6\,239.165\,6}{176\,715.125} = -0.035\,306$, $\hat{k}_3 = 0.001\,402$, $\hat{k}_3$ 是瓜螟种群第三代内禀死亡常数估计值, 故瓜螟种群第三代寿命分布为,

$$f_3(t) = \sqrt{2 \times 0.001\,402}\; e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001\,402}\, t^{\frac{3}{2}}}, \tag{18}$$

其个体在时刻 t 及以前死亡和存活的概率分别为

$$F_3(t) = 1 - e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001\,402}\, t^{\frac{3}{2}}}, \tag{19}$$

$$1 - F_3(t) = e^{-\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 0.001\,402}\, t^{\frac{3}{2}}}. \tag{20}$$

由(19)式算得种群理论死亡率(表 2)的相关指数 $r_3^2 = 0.968$, 这表明曲线拟合亦较好。由 $\hat{E}(X) = 8.4$ 知, 瓜螟第三代种群个体的平均寿命不足 9 d。

从以上讨论可以看出, 虽然瓜螟两代寿命分布模型相同, 但由于它的第三代内禀死亡常数大于第二代, 所以瓜螟第三代种群的死亡率高于第二代。由瓜螟寿命分布、内禀死亡常数及其死亡与存活的概率规律, 可从数量关系上更多地了解瓜螟种群的存亡情况。

4　结　语

本研究所建立的种群存亡概率模型是在控制外部因素的影响下, 探讨种群内在生存力对种群的生

存所起的主导作用。利用这种方法,可以探讨自然条件下不同种群生存与死亡概率规律,它对预测不同种群在不同龄区的生存率与死亡率、科学编制种群生命表、预报作物害虫的最佳防治时间、保护生态环境等提供了科学依据。

[参考文献]

[1] 刘光祖. 概率论与应用数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
[2] 袁志发. 概率基础与数理统计[M]. 北京: 农业出版社, 1987.
[3] 陈兰荪. 生物数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[4] 王金福. 瓜螟生物学和生态学特性的研究[J]. 浙江大学学报, 1988, 14(2): 221- 225.
[5] 王金福. 印度野瓜螟增长及其密度制约[J]. 动物研究, 1989, (3): 232- 237.

A discussion on the survival and death regularities of the population and melon borer population

SHI Mei-ying, LIU Guang-zu, ZHENG Li-fei
(*College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract: The mathematical methods were used to make research into the living populations lifetime distribution, population lifetime distribution model and the intrinsic death invariant of the population were observed, and population lifetime's mathematical expectation and variance were induced. Experiment data of melon borer's population was used to fit the second and third generation population distribution function, and testing result was quite good.

Key words: population; lifetime distribution; distribution function; intrinsic death invariant; mathematical expectation

(上接第113页)

Problems in second-order regression general rotation analysis

LU En-shuang, SONG Shi-de, GUO Man-cai
(*College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract: The experiment number, the orthogonality of experimental design, the regression coefficient's calculation and its correlativity in second-order regression general rotational design were discussed by theoretic research and example analysis, the differences between general rotation design and second-order orthogonal design were showed, some problems that should be noticed in regreesion coefficient significance tests were also pointed out.

Key words: second-order regression general rotation designing; orthogonality; regression coefficient