一类非自治的Logistic生长曲线及其应用*

卢恩双, 郭满才, 宋世德, 袁志发

(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘 要] 通过对决定单种群或有机体相对生长速率的机理进行研究, 引入了一类非自治的Logistic生长方程, 对其解的性质进行了系统研究。结果表明, 该模型不仅可以拟合受密度与时间两个因素限制的生长过程, 而且具有可塑性。

[关键词] 非自治方程; Logistic生长曲线; 模型拟合; 可塑性

[中图分类号] O175.13　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1000-2782(2002)04-0127-03

生物的生长发育分为细胞、器官、个体与群体等不同层次, 在某一特定层次上, 基于某一机理(如以营养动力学为基础等[1~3])或在其生长发育的特定阶段, 其生长发育过程往往是一条S型曲线, 随生物物种、遗传及生态环境的不同, 这一曲线呈现出不同的形式。对生物生长发育过程的数量化描述较为知名的有Mitscherlich, Brody, Bertalanffy, Gompertz, Logistic, 崔-Lawson等模型[4~9]。这些模型所表示的方程都具有固定的拐点, 因而都只能准确描述一种特定形状的S型曲线。由于生物的生长发育是一个极其复杂的过程, 往往受多个机理的影响, 也就是说, 是多种机理调控的共同结果[10~12], 因此, 前述的基本模型受其他机理的调控所形成的模型更适合于实际情形。笔者拟对Logistic生长曲线受时间控制的方程进行研究, 以推广Logistic生长曲线的适用范围, 提高方程的可塑性, 使拟合模型从机理上对生物的生长发育过程进行解释。

1　非自治Logistic的生长曲线的提出

Logistic生长曲线是1938年由比利时Verhulst提出来的。在简单生死过程中, 生物繁殖或死亡的概率保持不变, 并与该种群的大小无关。但是, 这只有在种群相当小, 以致它的成员间无干扰的情况下才可能是真实的。在有限的环境里, 任何种群的增长终究要受到环境及资源的限制, 因此, 当种群对资源的要求受到限制时, 种群只能达到他的“饱和水平”, 其数值决定于环境的“负担能力”。对于个体、组织或器官而言, 到一定时期由于生理的反馈作用, 亦使其生长速度受阻而趋于上限。

设生长上限为B, 则

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = R\frac{B-x}{B}\quad(R>0, B>0) \tag{1}$$

或

$$\frac{dx}{dt} = Rx\frac{B-x}{B}\quad(R>0, B>0) \tag{2}$$

所决定的生长称为Logistic生长方程。其机理为: 相对生长速率与剩余资源成正比, 与饱和容纳量成反比, 或解释成增长速度与剩余资源和现有种群密度成正比, 与饱和容纳量成反比。其满足初值条件$x|_{t=t_0}=x_0$的解为:

$$x = \frac{B}{1+\left(\frac{B}{x_0}-1\right)e^{-R(t-t_0)}} \tag{3}$$

方程(1)或(2)均仅以现有种群密度x为限制因素, 与时间t无显著关系, 称为自治的。实际上, 生物体在各个层次上的生长发育过程都往往受多个机理的共同调控, 表现在描述其数量变化规律的方程上, 其相对生长速率常常与时间t有显著关系。

设Logistic生长曲线受时间因素t的调控, 其生长方程变为:

$$x(t) = \frac{B}{1+\left(\frac{B}{x_0}\right)e^{-R(t-t_0)}}f(t) \tag{4}$$

其中$f(t)$为时间t的函数, 方程(4)称为非自治的Logistic生长曲线。

2　两类Logistic生长曲线的关系

为了以下运算方便, 设$L(t)=$

* [收稿日期] 2002-03-07
[作者简介] 卢恩双(1952-), 男, 陕西南郑人, 副教授, 主要从事农业应用数学的研究。

$\dfrac{B}{1+\left(\dfrac{B}{x_0}-1\right)e^{-R(t-t_0)}}$, 则(4)式表示为:

$$x(t)=L(t)f(t) \tag{5}$$

$L(t)$表示由第一种机理所决定的Logistic生长曲线。由(5)得

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{L'(t)}{L(t)}+\frac{f'(t)}{f(t)} \tag{6}$$

由此得两类生长曲线的关系如下:

1)非自治方程(4)的相对生长速率为其对应的自治方程(3)的相对生长速率与时间调控项$f(t)$的相对变化率的和。

显然, $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$的绝对值越大,非自治方程与自治方程的差异越大。

2)由于时间调控项的影响所引起的生长量的改变量为:

$$\Delta x=L(t)-x(t)=L(t)-L(t)f(t)=L(t)(1-f(t)) \tag{7}$$

由上式看到, $f(t)$越大的时刻, (4)与(3)的差值越大。显然,若$f(t)=1$,则$x(t)=L(t)$。若以$L(t)$为准, Δx反映了在时刻t时的时间控制效应。有了曲线$x=L(t)f(t)$,可进一步分析拐点及速率变化等。这里,拐点满足方程$L(t)f''(t)+L''(t)f(t)+2L'(t)f'(t)=0$。

3 实例[12]

大豆干物质重量变化资料列于表1,试拟合出大豆干物质重量变化曲线方程。

表1 大豆干物质重量变化资料

Table 1 Changes of the soybean dry substance weight with times

时间 t/d Time	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
干物重 x/g Dry substance weight	1.9	6.3	18.0	31.4	85.8	276.0	353.3	534.3	617.1	654.9	620.6	554.4	495.0	382.5

从表1可大致看出,在大豆干物质重量(x)变化初期,其数量关系与Logistic生长曲线相似,但随着时间(t)的变化,达到最大值后而下降。采用Logistic生长曲线及非自治的Logistic生长曲线分别进行拟合,结果为

$$L(t)=\frac{554.793\ 4}{1+1\ 062.562\ 5e^{-0.134\ 301\ 3t}} \tag{8}$$

$$x(t)=\frac{3\ 102.005\ 2}{(1+427.773\ 2e^{-0.086\ 888t})e^{0.015\ 523\ t}} \tag{9}$$

决定系数R^2分别为: 0.930 28, 0.991 55。用方程$L(t)$及$x(t)$分别进行预测,发现$x(t)$的偏差明显小于$L(t)$,这一点在生长的后期尤其突出。

4 讨 论

受时间调控的Logistic生长曲线,因$f(t)$不同而扩展了Logistic生长曲线,时间控制项$f(t)$可以是各种形式,由生长的具体情况而定。由式(7)知,当$f(t)>1$时, $\Delta x<0$,说明$x(t)$比$L(t)$生长速度快;若$f(t)<1$, $\Delta x<0$,说明$x(t)$比$L(t)$生长速度慢。另外,随着$f(t)$的变化, $x(t)$的拐点位置、数目较$L(t)$而言亦有变化。这些分析会进一步丰富生长曲线的分析内容。对其他类型的常用生长函数,亦可进行类似的研究。

[参考文献]

[1] CUI Qi-wu, Lawson G J. Study on models of single population: An expansion of the Logistic and exponential equation[J]. Theor Biol, 1982, 98(1): 645-659.

[2] CUI Qi-wu, LU Feng-yong. A mathematical model of predation based upon the theory of nutrition kinetics[J]. Ecological modelling, 1985, 28(2): 155-164.

[3] 崔启武, Lawson G J. 一个新的种群增长数学模型——对经典的Logistic方程和指数方程的扩充[J]. 生态学报, 1982, 2(4): 403-414.

[4] 陈兰荪. 数学生态模型学和研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[5] Richards F J. A flexible growth function for empirical use[J]. Exp Bot, 1959, 10(29): 290-300.

[6] 邢黎峰, 孙明高, 王元军. 生物生长的Richards模型[J]. 生物数学学报, 1998, 13(3): 348-353.

[7] Crossman M. Multiphasic analysis of growth curves in chickens[J]. Poultry Science, 1998, 67: 33-42.

[8] Hrwtz S I. Characterization of growth and development of male British United turkeys[J]. Poultry Science, 1991, 70(12): 2419-2424.

[9] Harpreet Singh. Growth curves analysis and genetic parameters of body weight in indigenous guineafowl[J]. Indian Journal of Poultry Sci-

ence, 1991, 26(1): 20- 25.
[10] 雷雪芹, 郭满才, 卢恩双, 等. 肉用鸡的累积生长与饲料报酬耦合模型研究[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2001, 29 (3): 76- 78.
[11] 郭满才, 秦豪荣. Logistic 曲线及其在生物生长分析中的应用[J]. 山西职业教育学刊, 1997, 6(4): 47- 51.
[12] 丁希泉, 郑秀梅. 农业实用回归分析[M]. 长春: 吉林科学技术出版社, 1989. 364- 373.

A kind of nonautonomous Logistic growth curve and its application

LU En-shuang, GUO Man-cai, SONG Shi-de, YUAN Zhi-fa
(*College of Life Sciences, Northwest Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract: The paper introduced a new kind of nonautonomous Logistic growth equation by studying the decided principle of single population or organism body relative growth rate, the systematic research to the solution's character was also done. The result showed: The new model not only can fit the growth process that is restricted by the density factor and time factor, but also have the flexibility.

Key words: nonautonomous equation; logistic growth curve; model fit; flexibility

---

(上接第 126 页)

A multiobjective evolutionary algorithm based on weighted sum approach and tracing pareto method

TANG Wei-dong[1], GUAN Zhi-hua[1], WU Zhong-yuan[1,2]
(1 *School of Management, Tianjin University, Tianjin* 300072; 2 *School of Management, Tianjin Polytechnic University, Tianjin* 300160)

Abstract: The most existing multiobjective evolutionary algorithms (MOEAs) such as NPGA (Niched Pareto Genetic Algorithm), NSGA (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) etc. are based on Pareto mechanical. Each step for checking Pareto optimality requires sorting and pair-wise comparison of at least a subset of the population, thus increasing the computational needs. This paper introduces a new algorithm based on weighted sum approach and tracing Pareto method-WSTPEA. The WSTPEA achieves a noninferior solution at each intermediate step which is not like the existing MOEAs that generate the total Pareto set in one run. In this paper the WSTPEA is described in detail and the flow chart of the algorithm is given. Two multiobjective problems are calculated and the solutions are analyzed.

Key words: multiobjective optimization; weighted sum approach; evolutionary algorithm