第 30 卷 第 2 期　　西北农林科技大学学报(自然科学版)　　Vol. 30 No. 2
2002 年 4 月　　Jour. of Northwest Sci-Tech Univ. of Agri. and For. (Nat. Sci. Ed.)　　Apr. 2002

一类三角插值算子在 Besov 空间中的逼近*

张三敖[1], 盛宝怀[2]

(1 宝鸡文理学院 数学系, 陕西 宝鸡 721007; 2 宁波大学 数学研究所, 浙江 宁波 315211)

[摘　要]　借助于 Hölder 范数引入的广义 K-泛函而定义了一种 Besov 空间, 用其对一类推广的三角插值算子逼近的正、逆定理进行了刻画。

[关键词]　Besov 空间; 内插空间; 插值算子; 有界线性算子

[中图分类号]　O174.41　　[文献标识码]　A　　[文章编号]1000-2782(2002)02-0139-03

1　引　言

用 Besov 空间刻画算子逼近的正、逆定理, 是逼近论中近几年讨论的热点问题之一, 对这方面的研究工作已有一些报道[1~6], 但尚未发现用 Besov 空间刻画周期插值算子的正、逆定理, 本研究的目的是借助正整数 α 阶光滑模而引入一种 Hölder 拟范数, 由此定义了一种广义的 K-泛函, 并用 K 方法构造出了一种 Besov 空间, 用其对一类积分型周期插值的正、逆定理进行了讨论。

用 $L_p^{2\pi}(1\le p\le+\infty)$ 表示以 2π 为周期并满足

$$\|f\|_{p,2\pi}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\quad(1\le p<+\infty)$$

$$\|f\|_{\infty,2\pi}=\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|<+\infty\qquad(p=+\infty)$$

的函数类。对结点 $t_i=t_{j,n}=\frac{2j\pi}{n+1}$, $0\le j\le n$, $n=0,1,2,\cdots$, 文献[7]中引入了三角插值算子

$$J_n^{\lambda}(f,x)=\frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n}f(t_j)k_n^{\lambda}(x-t_j)\tag{1}$$

其中 $$k_n^{\lambda}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{j=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kx\tag{2}$$

并满足条件

$$\lambda_j^{(n)}\neq 0,\ \lambda_j^{(n)}+\lambda_{n+1-j}^{(n)}=1\qquad(0\le j\le n,\ n=0,1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|k_n^{\lambda}(t)|\mathrm{d}t=O(1)\qquad(n\to+\infty)$$

为了讨论此算子在 $L_p^{2\pi}$ 中的逼近问题, 文献[8]中将上述算子进行了修正。

对正整数 $\alpha>0$, 作 α 阶 Steklov 平均

$$A_h^{\alpha}(f,x)=h^{-\alpha}\int_0^h\cdots\int_0^h f(x-t_1-\cdots-t_{\alpha})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{\alpha}$$

及 $$f_h(x)=-\sum_{j=1}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}(-1)^jA_{m}^{\alpha hj}(f,x)$$

进一步令

$$L_{n,s}(t)=\lambda_n^{-1}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2s}\qquad(s>0)$$

其中 λ_n^{-1} 满足 $\int_{-\pi}^{\pi}L_{n,s}(t)\mathrm{d}t=1$, 记

$$k_{n,s}(t)=L_{n',s}(t)\qquad\left(n'=\left[\frac{n}{s}\right]+1\right),$$

对 $s\ge\frac{\alpha+2}{2}$, $n-1<\frac{1}{h}<n$, 令

$$I_n(f,x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_{n,s}(t)\sum_{j=1}^{\alpha}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f_h(x-jt)\mathrm{d}t\tag{3}$$

则文献[8]中修正 $J_n^{\lambda}(f,x)$ 为

$$H_n^{\lambda}(f,x)=\frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n}I_n(f,t_j)k_n^{\lambda}(x-t_j),\ f\in L_1^{2\pi}$$

引入 α 阶连续模

$$\omega_{\alpha}(f,t)_{p,2\pi}=\sup_{0<h\le t}\|\Delta_h^{\alpha}f\|_{p,2\pi},\ t>0$$

其中 $$(\Delta_h^{\alpha}f)(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(x-jh),$$

$$\binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!},\ j=0,1,2,\cdots$$

令 $\mathrm{Lip}\,\alpha=\{g: g\in L_p^{2\pi}$ 且 $\omega_{\alpha}(g,t)_{p,2\pi}=O(t^{\alpha})\}$, 则对 $g\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 可赋以 Hölder 范数

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha}=\|g\|_{p,2\pi}+\sup_{t\ge 0}\frac{\omega_{\alpha}(g,t)_{p,2\pi}}{t^{\alpha}}\tag{4}$$

对 $f\in L_p^{2\pi}(1\le p<+\infty)$ 定义 K-泛函

$$K_p(f,t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}\,\alpha}(\|f-g\|_{p,2\pi}+t\|g\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha})$$

并采用 K 方法构造内插空间 $B_{p,q}^{\theta,\alpha}(0<\theta<\alpha)$ 为

* [收稿日期]　2001-05-09
[基金项目]　陕西省教育厅专项基金(00JK110)
[作者简介]　张三敖(1952-), 男, 陕西宝鸡人, 副教授, 主要从事算子内插研究。

$$B_{p,q}^{\theta,\alpha}=(L_p^{2\pi},Lip\alpha)_{\theta,q}^{K}=\begin{cases}\{f\in L_p^{2\pi}:\int^{\infty}(t^{-\theta}K_p(f,t^{\alpha}))^q\frac{dt}{t}<+\infty & (1\le p<+\infty)\\ \sup_{t\ge 0}K_p(f,t^{\alpha})<+\infty & (q=+\infty)\end{cases}$$

由于$L_p^{2\pi}\supset B_{p,q}^{\theta,\alpha}\supset Lip\alpha$,因此,继续作K-泛函

$$K_{p,q}^{\theta}(f,t)=\inf_{g\in B_{p,q}^{\theta,\alpha}}(\|f-g\|_{p,2\pi}+t\|g\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}})$$

其中

$$\|g\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}=\|g\|_{p,2\pi}+\begin{cases}\int^{\infty}(t^{-\theta}K_p(f,t^{\alpha}))^q\frac{dt}{t} & (1\le q<+\infty)\\ \sup_{t\ge 0}t^{-\theta}K_p(f,t^{\alpha}) & (q=+\infty)\end{cases}$$

并用K方法构造内插空间

$$B_{p,q,q'}^{\theta,\theta'}=(L_p^{2\pi},B_{p,q}^{\theta,\alpha})_{\theta',q'}^{K_{p,q}^{\theta}}\qquad(0<\theta'<\theta\alpha,1\le q'\le+\infty)$$

本研究讨论用$B_{p,q}^{\theta,\alpha}$及$B_{p,q,q}^{\theta,\theta'}$刻画$H_n^{\lambda}(f,x)$在$L_p^{2\pi}$中的逼近问题,所得结果为

定理1 当r满足条件

$$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\lambda_{n+1-j}^{(n)}=j^{\alpha}\qquad(j=0,1,2,\cdots)$$

且三角矩阵

$$\{\lambda_j^{*(n)}=\frac{n^{\alpha}\lambda_{n+1-j}^{(n)}}{j^{\alpha}},\lambda_0^{*(n)}=0,1\le j\le n,n=0,1,2,\cdots\}$$

满足条件对阶$\le n$的三角多项式t_n,有

$$\|K_n^{\lambda}*t_n\|_{p,2\pi}=O(\|t_n\|_{p,2\pi})$$

时,对$f\in L_p^{2\pi}$, $0<\theta<\alpha$, $1<p<+\infty$,则当$1\le q<+\infty$时,有

$$f\in B_{p,q}^{\theta,\alpha}\Leftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta}\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi})^q\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty\tag{5}$$

当$q=+\infty$时

$$\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}=O(n^{-\theta})\Leftrightarrow K_p(f,t^2)=O(t^{\theta})\tag{6}$$

定理2 在定理1的条件下,设$f\in L_p^{2\pi}$, $0<\theta<\alpha$, $0<\theta'<\alpha\theta$, $1\le q,q'\le+\infty$, $1<p<+\infty$,则当$1\le q'<+\infty$时

$$\in B_{p,q,q'}^{\theta,\theta'}\Leftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\theta'}\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi})^{q'}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q'}}<+\infty$$

当$q'=+\infty$时

$$\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}=O(n^{-\theta'})\Leftrightarrow K_{p,q}^{\theta}(f,t^{\alpha\theta})=O(t^{\theta'})$$

在下文中$A=O(B)$指存在常数$C>0$,而使$A\le CB$。

2 一些引理

引理1[8] 对$f\in L_p^{2\pi}(1<p<+\infty)$,则有常数$C>0$,而使

$$\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}\le C\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}\tag{7}$$

引理2 对$f\in L_p(1<p<+\infty)$,有$C>0$,而使

$$\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f),\frac{1}{n})_{p,2\pi}\le C\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}\tag{8}$$

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi}\le C\|f\|_{p,2\pi}\tag{9}$$

证明 由(7)及$\omega_{\alpha}(f,t)_{p,2\pi}\le C_{\alpha}\|f\|_{p,2\pi}$,有

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f),\frac{1}{n})_{p,2\pi}&\le\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f)-f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}+\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}\\&\le C\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}+\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}\\&=O(\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi})\end{aligned}$$

(9)可由文献[8]中找到。

引理3 对$f\in L_p^{2\pi}(1<p<+\infty)$,有常数$C>0$,而使

$$\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}\le Cn^{-2}\|f\|_{Lip\alpha}\tag{10}$$

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{Lip\alpha}\le Cn^{\alpha}\|f\|_{p,2\pi}\tag{11}$$

证明 由引理2中的(8)知道,对$f\in Lip\alpha$,有

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{Lip\alpha}=O(\|f\|_{Lip\alpha})\tag{12}$$

因此(11)成立。

对$f\in L_p^{2\pi}$,有

$$\begin{aligned}\|H_n^{\lambda}(f)\|_{Lip\alpha}&=\|H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi}+\sup_{t\ge 0}t^{-\alpha}\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f),t)_{p,2\pi}\\&=O(\|f\|_{p,2\pi}+\|D^{\alpha}H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi})\end{aligned}$$

及Bernstein不等式

$$\|D^{\alpha}H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi}=O(n^{\alpha})\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f),\frac{1}{n})_{p,2\pi}$$

因此,由

$$\omega_{\alpha}(H_n^{\lambda}(f),\frac{1}{n})\le C\|H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi}\le C\|f\|_{p,2\pi}$$

知,对$f\in L_p^{2\pi}$,有

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{Lip\alpha}=O(n^{\alpha})\|f\|_{p,2\pi}\tag{13}$$

由引理1,对$f\in Lip\alpha$

$$\begin{aligned}\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}&=O(\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi})=\\&O(n^{-\alpha}n^{\alpha}\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi})=\\&O[n^{-\alpha}(\|f\|_{p,2\pi}+\sup_{n>0}n^{\alpha}\omega_{\alpha}(f,\frac{1}{n})_{p,2\pi}]=\\&O(n^{-\alpha})\|f\|_{Lip\alpha}\end{aligned}\tag{14}$$

因此,(10)成立。由(9)、(12)及内插定理[9],有

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}=O(\|f\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}),f\in B_{p,q}^{\theta,\alpha}\tag{15}$$

由(9)、(13)及内插定理,有

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{B_{p,q}^{\theta}}=O(n^{\alpha\theta})\|f\|_{p,2\pi},f\in L_p^{2\pi}\tag{16}$$

而且由(9)、(14)及内插定理,有

$$\|H_n^{\lambda}(f)-f\|_{p,2\pi}=O(n^{-\alpha\theta}\|f\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}),f\in B_{p,q}^{\theta,\alpha}\tag{17}$$

引理4 对$f\in L_p^{2\pi}(1<p<+\infty)$, $0<\theta<\alpha$, $1\le q\le+\infty$,有

$$\|f-H_n^{\lambda}(f)\|_{p,2\pi}=O(K_{p,q}^{\theta}(f,n^{-\alpha\theta}))\tag{18}$$

且

$$\|H_n^{\lambda}(f)\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}=O(n^{\alpha\theta})K_{p,q}^{\theta}(f,n^{-\alpha\theta})\tag{19}$$

证明 对任意$g\in Lip\alpha$,有

$$\|H_n^\lambda(f)-f\|_{p,2\pi}\le\|H_n^\lambda(f-g)\|_{p,2\pi}+\|H_n^\lambda(g)-g\|_{p,2\pi}+\|f-g\|_{p,2\pi}=O(\|f-g\|_{p,2\pi}+n^{-\alpha\theta}\|f\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}})$$

因此有(18)成立。对任意 $g\in B_{p,q}^{\theta,\alpha}$, $f\in L_p^{2\pi}$

$$\|H_n^\lambda(f)\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}\le\|H_n^\lambda(f-g)\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}+\|g\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}}=O(n^{\alpha\theta}\|f-g\|_{p,2\pi}+\|g\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}})=O(n^{\alpha\theta})(\|f-g\|_{p,2\pi}+n^{-\alpha\theta}\|g\|_{B_{p,q}^{\theta,\alpha}})$$

因此(19)成立。

3　定理证明

用 $L(A\to B, C)$ 表示映 A 到 B 的有界线性算子的集合, 则下列命题可由文献[10]中找到。

命题　设 A_0, A_1 为赋范空间, $L_n\in L(A_i\to A_i, C)$ $(i=0,1)$, $A_1\subset A_0$, $L_n\in L(A_0\to A_1, C)$ 且对 $\alpha>0$, 有

(1) $\|L_n(a)\|_{A_0}\le M\|a\|_{A_0}$, $a\in A_0$;

(2) $\|L_n(a)\|_{A_1}\le Mn^\alpha\|a\|_{A_0}$, $a\in A_0$;

(3) $\|L_n(a_1)\|_{A_1}\le M\|a_1\|_{A_1}$, $a_1\in A_1$;

(4) $\|L_n(a_1)-a_1\|_{A_0}\le Mn^{-\alpha}\|a_1\|_{A_1}$, $a_1\in A_1$。

此处 M 表示常数。则当 $a\in A_0$ 时, 对 $1\le q<+\infty$, $0<\theta<\alpha$, 有 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^\theta\|L_n(a)-a\|_{A_0})^q\frac{1}{n}\right)^{\frac1q}<+\infty\Leftrightarrow\left(\int^{\infty}(t^{-\theta}K(t^\alpha,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q}<+\infty$;

当 $q=+\infty$ 时, 对 $0<\theta<\alpha$, 有

$$\|L_n(a)-a\|_{A_0}=O(n^{-\theta})\Leftrightarrow K(t^\alpha,a)=O(t^\theta)$$

这里

$$K(t,a)=\inf_{a_1\in A_1}(\|a-a_1\|_{A_0}+t^\alpha\|a_1\|_{A_1})。$$

在此命题中令 $A_1=\mathrm{Lip}\alpha$, $A_0=L_p^{2\pi}$, 则由(9), (12), (13), (14)可得定理1。

在此命题中令 $A_1=B_{p,q}^{\theta,\alpha}$, $A_0=L_p^{2\pi}$, 则由(9), (15), (16), (17)可得定理2。

[参考文献]

[1]　Ditzian Z, Totik V. Remarks on Besov spaces and best polynomial approximation[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 104: 1059- 1066.

[2]　Li Song. The equivalence relations between the Ditzian-Totik moduli of smoothness and best polynomial approximation in the Besov spaces [J]. Math Anal and Appl, 1997, 215: 1- 14.

[3]　Zhang Nan-song, Zhou Ding-xuan. Positive and inverse theorems of Jackson operators in Besov spaces[J]. Bull Appl Math, 1994, 17: 355 - 363.

[4]　盛宝怀, 尚增科. 代数多项式和指数型整函数在Besov 空间中的逼近[J]. 应用数学学报, 1999, 22(4): 490- 496.

[5]　Li song. The eguivalence relations between the best approximation and linear operators approximation in a Besov space[J]. Acta Mathematica Sinica New Series, 1999, 13(4): 527- 536.

[6]　Yang Li-hua. Approximation order and interpolation spaces[J]. Approx Theory and its Appl, 1998, 14(1): 57- 68.

[7]　刘永平. 一类三角多项式插值算子的逼近性质[J]. 东北数学, 1998, 4(3): 289- 308.

[8]　Shang Zen-ke, Sheng Bao-huai. Approximation of certain generalized interpolation in $L_p^{2\pi}$ and $L_{p(R)}$ spaces[J]. J Math Study, 1997, 30(3): 253- 259.

[9]　Bergh J, Lofstrom J. Interpolation spaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, World Publishing Corp, 1976.

[10]　张三敖. Meyer-Konig and Zeller 算子及Bernstein 算子在内插空间中的逼近[J]. 西北农业大学学报, 2000, 28(6): 168- 174.

On approximation by a kind of trigonometrical interpolatory operators in besov spaces

ZHANG San-ao[1], SHENG Bao-huai[2]

(1 Department of Mathematics, Baoji College of Arts & Sci, Baoji, 721007, China; 2 Institute of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China)

Abstract: A kind of new K-functional is introduced with the help of Hölder norm, with which the direct theorem and the inverse theorem of a kind of trigonometrical interpolatory operator are characterized.

Key words: besov space; interpolation space; interpolatory operator; bounded linear operator