# 受压构件偏心距增大系数 7 的计算

## 杨振华<sup>1</sup>, 于志秋<sup>2</sup>

(1 杨凌职业技术学院 水利系; 2 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘 要] 针对现行钢筋混凝土设计规范中 *n*计算公式在应用方面存在的某些不足,采用有限元迭代法并考虑二阶弯矩的影响,得出了在不同端弯矩和约束条件下偏压构件任意截面处侧向挠度 *f* 与相应的 *n*值。例证检验结果表明,该方法所得结果合理可靠。

[关键词] 受压构件; 偏心距增大系数; 侧向挠度; 有限元迭代法

[中图分类号] TU 375. 301 [文献标识码] A

[文章编号]1000-2782(2002)02-0127-04

在《混凝土结构规范》GBJ10- 89<sup>[1]</sup>及《水工混 凝土结构设计规范》DL/T5057- 96<sup>[2]</sup>中的 $\eta$ 计算公 式,是以基本长柱(两端铰接,端弯矩为等弯矩)作为 研究对象(见图1),并假定柱为单向弯曲时,则柱的 最大变形f max产生在最大弯矩M max处,由最大变形 引起的二阶弯矩 $M_2$ 可直接与一阶弯矩 $M_1$ 相加,此 时截面上的总弯矩为 $M = M_1 + M_2 = N f$  max + N e0。由 此可见,规范给出的 $\eta$ 公式都是对控制截面而言。以 文献[3]中题为例(见图2),该典型排架柱下端固



图 1 偏压构件的侧向挠度 Fig 1 Side deflection of biasing strutting

- 1 计算方法
- 1.1 计算假定

[收稿日期] 2001-03-19

钢筋混凝土受压柱在偏心荷载作用下产生纵向

定,上端为弹性约束,其弯矩图为梯形分布,对于柱 底可能是一个控制截面,用规范公式计算 $\eta$ 是合理 的。而对于柱的其他截面 $\eta < \eta$ ,如c截面 $\eta < \eta$ , 但该截面是柱进行承载力设计时的实际控制截面, 若盲目取 $\eta = \eta$ ,将截面弯矩无区别地按规范中 $\eta$ 公式计算,则会导致柱的配筋过多,在抗震鉴定中还 会引起认为柱强度不够需加固的麻烦后果。为此,文 献[3]~[7]从不同角度指出存在此类问题。本研究 就此问题着重进行讨论。



图 2 排架的计算简图

Fig 2 Calculating sketch of frame structure 弯曲,在弯矩作用平面内将产生侧向挠度f,侧向挠 度f将引起二阶弯矩Nf。通常用 $\eta$ 来反映因二阶弯 矩影响承载力降低的效应。对于短柱,取n=1,对于 长柱, $\eta$ 越大,表明二阶弯矩影响愈大,一阶弯矩在

<sup>[</sup>作者简介] 杨振华(1954-), 男, 陕西凤翔人, 副教授, 硕士, 主要从事水工结构的研究。 © 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

总弯矩中所占的比例愈小,所以计算 7值的实质就 是求长柱的侧向附加挠度 f值。

由于所研究的长柱L<sub>0</sub>/h< 30,该类柱属于材料 破坏。因此,假定材料为均质、弹性体,按弹性稳定理 论,该柱的变形符合小变形的假定,见文献[4],[8]。 1.2 **计算方法** 

用有限元理论研究柱在外荷载下的变形规律, 这既不是求失稳临界状态下特征值问题,也不是忽 略二阶弯矩的有限元法,而是求柱在一阶弯矩和二 阶弯矩作用下各截面处的挠度,即计入二阶弯矩影 响的有限元迭代法(以下简称有限元迭代法)。因此, 这里无法应用一般的有限元稳定分析程序,但可将 研究对象化为若干单元并利用平面桁架、框架有限 元分析程序 P4D<sup>[9]</sup>进行迭代计算,以求得柱在荷载 作用下考虑二阶弯矩影响的任一截面的侧向挠度 *f*,从而得到相应的 *η*值。

采用有限元迭代法进行计算时应先将柱划分为 若干单元,建立基本坐标系x, y, z,然后进行结构 模式输入,计算机会主动输出各单元的杆端内力 (W, Q, M)和结点的位移值( $U, v, \theta$ )。在有限元迭代 过程中仅考虑弯矩作用引起的位移(剪力引起的位 移很小,可忽略不计)。迭代的思路是:先求出柱各个 单元在一阶弯矩 $M_{1i}$ 下引起的位移 $U_{1i}(x)$ ,然后通 过数次迭代求得在二阶弯矩 $M_{2i}$ 下引起的位移  $U_{2i}(x)$ ,最后柱任一截面的总位移为一阶弯矩与数 次迭代后二阶弯矩下的位移之和。即 $U(x) = U_{1i}(x)$ 

+  $U_{2i}(x), U(x) = f(x)_{o}$ 

为了验证有限元迭代法计算结果的可靠性,可 采用解析法与其进行比较。

需要指出的是,钢筋混凝土是一种非均质的弹 塑性复合材料,当柱承受的外载达到一定程度时,柱 将产生裂缝,且裂缝随外荷载的增大而不断地加大。 在计算截面刚度 *E I* 时,必须考虑混凝土  $\sigma \epsilon$ 的非 线性特征及裂缝存在对 *E I* 削弱的影响,而这种影 响可以通过对截面刚度 *E I* 修正来实现,即对 *E I* 乘  $\alpha(\alpha = 1)$ 参数。 $\alpha$  仍采用 TJ10-74 中有关  $\alpha =$ 0 1/(0 3+  $e_0/h$ )+0 143 公式来计算。经过大量计 算比较,可以认为  $\alpha$  的考虑是合理的。因此,在有限 元及解析法计算时应考虑  $\alpha$  的影响。

1.3 解析法

某一偏心受压构件,如图 3 所示。该柱下端固 定,上端按弹性支承考虑。在稳定情况下,求解微分 方程以得出其变形值。



图 3 偏压构件的计算简图

Fig. 3 Calculating sketch of biasing strutting

#### 由计算简图可知

$$M(x) = N(\delta - y) + M_B - T(L - x)$$

式中, $M_B$  表示作用于杆端的弯矩,T 表示作用于杆端的横向力(正方向),N 表示作用于杆端的轴向压力, $\delta$ 表示在 $M_B$ ,N,T 作用下柱端B 截面的挠度值( $\delta = f_{max}$ ),y表示杆任意截面上侧向位移,L表示杆

件的长度。弯矩符号规定以微分段外受拉为正。 由柱弯曲时挠度曲线近似方程得:

$$y = [N (\delta - y) + M_B - T (L - x)]/EI$$

整理得

$$y + (N/EI)y = [N \delta + M_B - T(L - x)]/EI(1)$$

方程(1)属二阶常系数非齐次线性微分方程,该 方程解的结构为对应齐次方程的通解+本方程的一 个特解。

$$\Rightarrow N / E I = n^2$$

 $y + n^2 y = [N \delta T (L - x) + M_B]/EI$  (2) 解方程(2)其特解为:

$$y' = [N \,\delta + M_B - T (L - x)]/n^2 E I = T x / N + (N \,\delta + M_B - TL) / N$$
(3)

方程(2)的通解为:

$$y = C_{1}\cos nx + C_{2}\sin nx + [N \ \delta + M_{B} - T(L - x)]/N$$
(4)

边界条件为 x = 0, y = 0, y = 0 将边界条件分别代入方程(4)得:

$$C_{1} = - (N \delta + M_{B} - TL) / N; C_{2} = - T / nN$$
再将  $C_{1}, C_{2}$  代入方程(4) 得:  
 $y = - [\delta + M_{B} / N - TL / N] \cos nx - (T / nN) \sin nx + [\delta + M_{B} / N - T(L - x) / N]$  (5)  
当  $X = L$  时,  $y = \delta = f_{max}$ , 由方程(5) 得:  
 $\delta = [M_{B} / N - (T / nN) \sin nL] / \cos nL - M_{B} / N + TL / N$  (6)  
1. 4 计算方法的验证

例: 某柱端作用有M = 176 813 9 kN · m, N = 1 245 44 kN, T = 9 806 7 kN, E = 25 497. 7 M Pa, J = 7. 2 × 10<sup>-3</sup> m<sup>4</sup>, L = 5 33 m, 截面 b × h = 0 4 m × 0 6 m, 求侧向挠度 f 值。

计算结果见表 1。

#### 表1 两种算法所得 f 值的比较

| Table 1 | Comparison | between $f$ | values of | different | calculation | methods |
|---------|------------|-------------|-----------|-----------|-------------|---------|
|---------|------------|-------------|-----------|-----------|-------------|---------|

| 参数 α                   | 有限元迭<br>Limited unit repe              | 代法<br>:ition m ethod            | 解析法<br>A nalysis                       |                                 |  |
|------------------------|--|---------------------------------|--|---------------------------------|--|
| Parameter $\alpha_e$   | 柱底截面/mm<br>Column bottom cross-section | 其他截面/mm<br>O ther cross-section | 柱底截面/mm<br>Column bottom cross-section | 其他截面/mm<br>O ther cross-section |  |
| 不考虑<br>Inconsideration | 11. 9                                  | 5                               | 12                                     | 5                               |  |
| 考虑<br>Consideration    | 40.3                                   | o <u> </u>                      | 42 1                                   | -                               |  |
|                        |  |                                 |  |                                 |  |

由表 1 结果可得出, 在考虑 α 影响后, 柱底截 面采用两种计算方法结果相对误差为 4 1%, 其原 因是柱截面刚度 *EI* 的取值不同, 解析法是取各个 单元的刚度平均值作为柱的刚度值, 而有限元迭代 法则是按各个单元实际刚度计算的, 对其他截面(*x* = 3 5 m 处的截面)未进行此项计算。

通过上述两种计算方法结果的比较可看出,有限元迭代法计算结果是可靠的,该方法用于求解柱的侧向挠度*f*是可行的。

# 2 影响 η的主要因素及其计算结果可 靠性校核

#### 2 1 影响 **7**的主要因素

根据理论分析及文献[4], [5], [10]可得出: 影 响 η的主要因素有长细比*L*<sub>0</sub>/*h*, 荷载相对偏心距 *e*<sub>0</sub>/*h*(或 *e*<sub>i</sub>/*h*), 混凝土强度等级 *c*, 柱截面及其配筋 率的大小(钢筋型号及长期荷载作用的影响。

2 2 1 *1*的计算公式

$$\eta_{=} (e_{i} + f)/e_{i} = 1 + f/e_{i}$$
(7)

以  $e_0 = M / N L_0 / h$  和混凝土强度等级为主要因

式中, e<sub>i</sub> 为计算偏心距, 对房建规范 GBJ10-88, e<sub>i</sub>= e<sub>0</sub>+ e<sub>a</sub>, e<sub>a</sub>=012(03h<sub>0</sub>-e<sub>0</sub>), 对水工规范 e<sub>i</sub>= e<sub>0</sub>, 素,利用 P4D 程序进行迭代计算,可得出任一截面 f 值,然后用公式(7)可得出任一截面上所需的 η 值。

2 2 2 计算成果可靠性校核 通过有限元迭代法 和规范的公式进行结果对比(控制截面),以验证采 用有限元迭代法的可靠性。具体见文献[6],下面仅 列两例进行比较。

例 1: 一矩形截面柱,  $b \times h = 400 \text{ mm} \times 600 \text{ mm}$ , 混凝土强度等级为  $C_{20}$ ,轴向压力设计值为 N = 2562 kN,  $e_0 = 26 \text{ mm}$ , 求  $\eta$ 

解: 按水工规范  $\eta = 1 + 1/(1 \ 400 \ e_0/h) \ (L_0/h)^2 \xi_1 \xi_2$  (8)  $e_0 = e_i = 26 \text{ mm}$  $\xi_1 = 0 \ 5f \ cA \ /Y_d N = (0 \ 5 \times 10 \times 400 \times 600) /$ 

 $(1. 2 \times 2562 \times 10^3) = 0.39$ 

 $L_0/h=7\ 200/600=12<5,\ \xi_2=1.0$ 

由(8)式得  $\eta$ = 1+ 1/1400 × (26/600)<sup>2</sup> × 122 ×

#### 按有限元选代法,由(7)式得 ルー1.84。

例 2: 某纺织工厂的边柱为单层锯齿形结构, 经 排架分析, 边柱上的力示于图 2, 柱截面尺寸 350 mm × 450 mm, 采用 II 级钢筋, *L*<sub>0</sub>= 1.5×5.7 m = 8 55 m, 试分别按混凝土强度等级 *C*<sub>20</sub>及 *C*<sub>30</sub>求 *ŋ*值

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

#### 并进行相应的配筋计算。

面A, 而另一个为截面C。具体计算结果见表 2。

解: 该柱的控制截面可能有 2 个, 一个为柱底截

表 2 截面 $A \, C$  的  $\eta$ 值比较

Table 2  $\eta$  comparison between cross-section A and C

|                | 规范公式<br>Standard formula   |  | 有限元迭代法<br>L in ited unit again and again |                                       |  |
|----------------|----------------------------|--|--|---------------------------------------|--|
| intensity rate | Α                          | С                                      | Α  | С                                     |  |
| C 20<br>C 30   | $\eta = 3 01  \eta = 3 01$ | $\eta_{=}$ 1. 493<br>$\eta_{=}$ 1. 493 | $\eta = 2946$<br>$\eta = 245$            | $\eta_{=}$ 1. 30<br>$\eta_{=}$ 1. 132 |  |

由理论分析及表 2 可知: 在其他条件不变的情 况下,随着混凝土强度等级的提高,其截面刚度也随 之增大,故f 随之减小, $\eta$ 相应的减小。需要指出的 是,本例中混凝土等级为 $C_{20}, C_{30}$ 时, $\eta$ 值是相同的, 其原因在于规范公式中  $\xi_1 = 0.5f A / \mathcal{Y}_{4}N$ ,且  $\xi_5 > 1$ 时取  $\xi_1 = 1$ 。在 $C_{20}$ 时,  $\xi_1 > 1$ ,在 $C_{30}$ 时,  $\xi_1 \gg 1$ ,而只能 取  $\xi_1 = 1$  所致。在计算柱底截面时两种方法所得结 果是一致的(当  $\xi_1 = 1$ 时),而计算其他截面则相差 较大。在配筋计算时,所采用的截面必须是控制截 面。以该柱为例,经比较 $\eta_{M_c} > \eta_{M_A}, C$ 截面为柱的 控制截面,当采用混凝土等级为 $C_{30}$ 且对称配筋时, 按有限元迭代法得出的 $\eta$ 值进行配筋计算(每侧配 筋量)比采用规范公式 η值所得的配筋量节省 50 6%。由此可见,在某些情况下用规范公式计算柱 任一截面结果过于保守,而用有限元迭代法计算 η 是合理的,具有较强的实用性。

### 3 结 论

 1) 针对现行规范 η公式在应用中的缺陷, 本研 究提出考虑二阶弯矩影响的有限元迭代法计算 η值 是合理的, 可用于结构设计。

2)本方法适用于 8 *L*<sub>0</sub>/h 30 的长柱, 且端弯 矩为非矩形分布的情况。同样也适用于端弯矩为异 号分布情况, 具体见文献[6]。

#### [参考文献]

- [1] 混凝土结构规范(TJ10-89)[M] 北京:中国建筑工业出版社,1989.
- [2] 水工混凝土结构设计规范(DL/T5057-1996)[M].北京:中国电力出版社, 1997.
- [3] 林聪华 偏心受压柱弯矩增大系数 7值正确运用[J] 建筑结构, 1990, (4): 25-26
- [4] 王伟志, 腾智明 钢筋混凝土结构理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985.
- [5] [联邦德国]F·革昴岭特E·希 钢筋混凝土结构设计原理[M].北京:人民交通出版社, 1991.
- [6] 杨振华、钢筋混凝土受压构件偏心距增大系数 η的研究[D],陕西杨陵:西北农业大学水利建筑工程学院,1997.
- [7] [美]M. 索尔维多尼M. 利维持, 叶仲玑 建筑结构设计[M] 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
- [8] [美]S. 铁摩辛柯丁·盖尔 材料力学[M] 北京: 科学出版社, 1978
- [9] 于志秋 平面桁架、框架有限元静力分析程序 P4P 使用简介 [M]. 广州: 珠江出版社, 1993.
- [10] 钢筋混凝土结构设计与构造(1985年设计规范,资料汇编)M].北京:中国建筑科学出版社,1985.

# The calculation of bias distance increasing coefficient $\eta$ of pressure bearing elements

#### **YANG Zhen-hua**<sup>1</sup>, **YU Zhi-qiu**<sup>2</sup>

(1 Department of Water Conservancy, Yang ling Vocational and Technical College, Yang ling, Shaanx i 712100, China; 2 College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest Sci Tech University of Agriculture and Forestry, Yang ling, Shaanx i 712100, China)

Abstract: To be in light of the fault of increase coefficient of bias distance  $\eta$  formula in current RC standard in practice, considering the influence of two stepped moments by using limited unit theory again and again, we reached the  $\eta$  of corresponding side and side deflection f of biasing structure whose column ends are different and restraint conciliations are not the same By contrast, the result is reliable and rational

Key words: pressure bearing element; increase coefficient of bias distance; side deflection; method of limited unit again and again