

关于微积分基本概念的注记

王乃信, 卢恩双, 吴养会

(西北农林科技大学 生命科学学院, 陕西 杨陵 712100)

[摘 要] 从与微分中值定理保持统一性的观点出发定义微分, 基于 Newton-Leibniz 微积分基本公式定义定积分, 建立相当于微分中值定理逆命题的辅助定理, 并据此严格叙述定积分的微元法。

[关键词] 微分; 定积分; 微元法

[中图分类号] O 172

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-2782(2001)06-122-02

在参加教育部“面向 21 世纪高等农林院校本科数学教学内容和课程体系”课题研究中, 笔者曾经对微积分的体系进行了思考和探讨, 并对若干重要之处进行了修改和完善, 这些已经部分地体现在笔者编写的教材中^[1,2]。为了推动这项改革, 现就微积分基本概念作如下注记, 以期得到大家的指正和引起大家的讨论。为了便于叙述, 本文恒设 $\Delta x > 0$ 其实, 向 $\Delta x < 0$ 情形的推广是很简单的, 故略去。

1 微 分

定义微分时, 应与微分中值定理保持统一性。

定义 设区间 $[a, b]$ 的长度为 $\Delta x = b - a$, $x_0 \in [a, b]$, 函数 $f(x)$ 在 x_0 点处可导, 导数为 $f'(x_0)$, 则定义

$$f'(x_0)\Delta x$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 点关于区间 $[a, b]$ 的微分。

可以证明, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 微分 $f'(x_0)\Delta x$ 是增量 $\Delta y = f(b) - f(a)$ 的线性主部, 即误差为 Δx 的高阶无穷小。

又据 Lagrange 微分中值定理, 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则必有 $x_0 \in (a, b)$, 使

$$\Delta y = f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) = f'(x_0)\Delta x.$$

这样定义了微分后, 微分中值定理就进一步深化和补足了微分概念。这样定义了微分后, 定积分的微分元素法, 即微元法, 才真正名副其实。

2 定积分

笔者把 Newton-Leibniz 微积分基本公式作为定义定积分的依据。

定义 1 设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b)

内连续, 且

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b),$$

则定义

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

定义 2 设 $\int_a^b f(x) dx$ 和 $\int_a^c f(x) dx$ 已有定义, 则定义

$$\int_c^b f(x) dx = - \int_b^c f(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

本来, Riemann 的定积分定义是严格的分析定义, 但对农林院校教学而言, 该定义有明显的缺点: 首先是定义复杂; 其次是定义所涉及的极限既非数列极限, 又非函数极限, 要真正理解, 难度较大; 最后, 在应用问题中, 该定义既难于直接判断定积分的存在性, 也未直接提供将积累量写成定积分形式的具体可行的方法。

应用中常见的定积分问题是连续函数的积分, 或者至多有有限个不连续点的函数的积分。笔者的定义满足了应用中常见问题的需要, 虽然不能包括几乎处处连续的有界函数积分的一切情形, 但对于至多有有限个不连续点的有界函数的积分, 笔者的定义与 Riemann 定义完全等价, 并且笔者的定义简明得多。此外, 还必须指出, 本定义实际上包括了有有限个无穷间断点的函数积分的定义。

3 微元法

微元法应该是积分定义的补充。

先建立相当于微分中值定理逆命题的辅助定

[收稿日期] 2000-12-26

[作者简介] 王乃信(19-), 男, 陕西户县人, 教授, 博士生导师, 主要从事数学和计算机应用方面的教学和研究工作。

理。

辅助定理 1 设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 如果任取 $[c, d] \subset [a, b]$, 恒有 $x_0 \in (c, d)$, 使

$$F(d) - F(c) = f(x_0)(d - c),$$

则恒有

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b).$$

辅助定理 2 设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 内连续, 如果任取 $[c, d] \subset [a, b]$, 恒有 $x_1 \in (c, d), x_2 \in (c, d)$, 使

$$F(d) - F(c) = f(x_1)g(x_2)(d - c),$$

则恒有

$$F'(x) = f(x)g(x), x \in (a, b).$$

根据辅助定理, 定积分微元法的严格叙述应为:

微元法 1 设积累量 I 分布在区间 $[a, b]$ 上, 如果存在 (a, b) 内的连续函数 $f(x)$, 使对于任意部分区间 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的部分积累量 $I_{[c, d]}$, 恒有 $x_0 \in (c, d)$, 使

$$I_{[c, d]} = f(x_0)(d - c) = f(x_0)\Delta x,$$

则该积累量可以表示为定积分

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

微元法 2 设积累量 I 分布在区间 $[a, b]$ 上, 如果存在 (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 使对于任意部分区间 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的部分积累量 $I_{[c, d]}$, 恒有 $x_1 \in (c, d), x_2 \in (c, d)$, 使

$$I_{[c, d]} = f(x_1)g(x_2)(d - c) = f(x_1)g(x_2)\Delta x,$$

则该积累量可以表示为定积分

$$I = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

以上叙述中, 如将所有开区间改为闭区间, 也是正确的。以上叙述还可进一步推广。

微元法 3 设积累量 I 分布在有界平面单连通闭区域 Σ 上。如果存在 Σ 上的连续函数 $f(x, y)$, 使对任意部分单连通闭区域 $\Delta\Sigma \subset \Sigma$ 上的部分积累量 $I_{\Delta\Sigma}$, 恒有 $(x_0, y_0) \in \Delta\Sigma$, 使

$$I_{\Delta\Sigma} = f(x_0, y_0)\Delta\sigma,$$

式中, $\Delta\sigma$ 为 $\Delta\Sigma$ 的面积, 则该积累量可以表示为重积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(x, y) d\sigma$$

微元法 4 设积累量 I 分布在有界平面单连通闭区域 Σ 上。如果存在 Σ 上的连续函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$, 使对任意部分单连通闭区域 $\Delta\Sigma \subset \Sigma$ 上的部分积累量 $I_{\Delta\Sigma}$, 恒有 $(x_1, y_1) \in \Delta\Sigma, (x_2, y_2) \in \Delta\Sigma$, 使

$$I_{\Delta\Sigma} = f(x_1, y_1)g(x_2, y_2)\Delta\sigma,$$

式中, $\Delta\sigma$ 为 $\Delta\Sigma$ 的面积, 则该积累量可以表示为重积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(x, y)g(x, y) d\sigma$$

这样叙述的微元法, 不仅严格, 无二义性, 而且具有较强的可操作性。

[参考文献]

- [1] 王乃信 关于微积分体系的思考[J]. 西北高等农林教育, 1997, (3): 14- 15
- [2] 王乃信 微积分[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000
- [3] 华罗庚, 王元 有限与无穷, 离散与连续[J]. 科学通报, 1963, (12): 4- 21

Comment On the fundamental concepts of calculus

WANG Nai-xin, LU En-shuang, WU Yang-hui

(College of Life Sciences, North West Sci-Tech University of Agriculture and Forestry, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: This paper defined the differential from a point of view to keep the unification with mean value theorem of differential, defined the definite integral on the basis of Newton-Leibniz fundamental formula for calculus, and established the auxiliary theorems as inverse proposition of mean value theorem of differential, and strictly described the methods of differential element for definite integral

Key words: differential; definite integral; method of differential element